

HIDRAULICĂ SUBTERANĂ (note de curs)

Daniel Scrădeanu

3.HIDROSTATICA	2
3.1.LEGEA GENERALA A HIDROSTATICII.....	2
3.2. REPAUSUL LICHIDELOR GRELE INCOMPRESIBILE	3
Aplicație: Principiul vaselor comunicante.....	5
Aplicație: Principiul lui Pascal	5
3.3. FORMA ENERGETICA A STARII DE REPAUS	6
3.4. DIAGrame DE PRESIUNI.....	9
3.5. FORȚE HIDROSTATICE.....	11
3.5.1. Forțe hidrostatice pe suprafețe plane	11
Aplicație: Forțe hidrostatice pentru suprafețe plane regulate	13
Aplicație: Forța hidrostatică pe o suprafață plană sollicitată pe o singură față (m. grafică)	14
Aplicație: Forța hidrostatică pe o suprafață plană sollicitată pe ambele fețe (m. grafică)	15
3.5.2. Forțe hidrostatice pe suprafețe curbe deschise	17
3.5.3. Forțe hidrostatice pe suprafețe închise	19

3.HIDROSTATICA

HIDROSTATICA studiază lichidele în stare de **repaus** și se bazează pe o serie de principii fundamentale care se aplică mediului continuu (principiul inerției, al reacțiunii și interacțiunii, paralelogramul forțelor), principii care nu pot fi demonstrate dar sunt validate prin consecințele lor.

3.1.LEGEA GENERALA A HIDROSTATICII

Ecuatiile de echilibru pentru un element paralelipipedic de lichid în repaus se obțin particularizând în ecuațiile generale de mișcare Navier această stare de repaus prin:

- $a_x = a_y = a_z = 0$
- $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

Rezultând pentru cele trei axe sistemul de ecuații:

$$\rho \cdot G_x = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x}$$

$$\rho \cdot G_y = \frac{\partial p_{yy}}{\partial y}$$

$$\rho \cdot G_z = \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}$$

care înmulțite cu dx, dy , respectiv dz și adunate termen cu termen, conduc la:

$$\rho \cdot (G_x \cdot dx + G_y \cdot dy + G_z \cdot dz) = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} dy + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} dz = dp$$

Forța masică $\vec{G}$ derivă dintr-o funcție de potențial $-U$, componentele forței masice pentru unitatea de masă, de-a lungul celor trei axe de coordonate fiind:

$$G_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, G_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, G_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Introduse în ecuația de echilibru pentru elementul paralelipipedic de lichid, forțele masice unitare conduc la:

$$\rho \cdot \left(-\frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx - \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy - \frac{\partial U}{\partial z} \cdot dz \right) = -\rho \cdot dU = dp$$

În câmpul gravitațional terestru:

$$G_x = G_y = 0 \text{ și}$$

$$G_z = -\frac{dU}{dz} = -g \Leftrightarrow dU = g dz \Rightarrow U = g \cdot z + C$$

În câmpul gravitațional terestru ecuația de echilibru, **legea hidrostaticii**, devine:

$$\rho \cdot g \cdot dz + dp = 0$$

care prin integrare (**Fig.3.1.**) conduce la forma:

$$\rho \cdot g \cdot \int_{z_0}^z dz + \int_{p_0}^p dp = 0$$

$$\rho \cdot g \cdot (z - z_0) + p - p_0 = 0$$

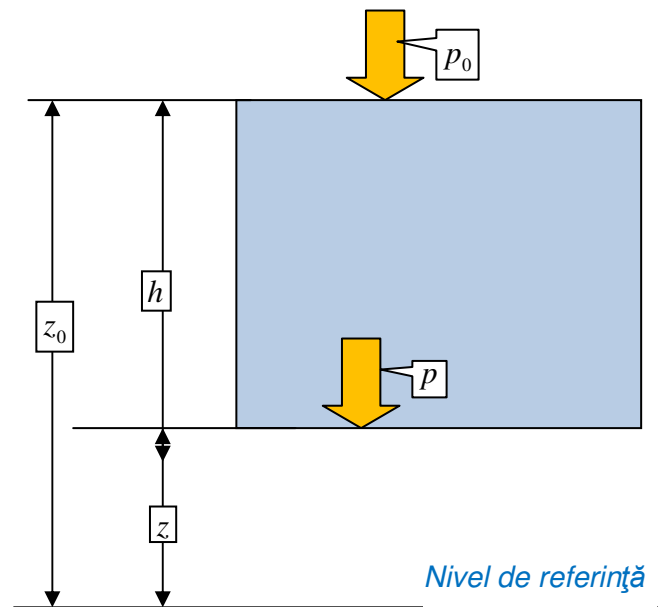


Fig.3.1. Legea hidrostaticii

din care rezultă că:

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot (z_0 - z) = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

3.2. REPAUSUL LICHIDELOR GRELE INCOMPRESIBILE

HIDROSTATICA **lichidelor grele** studiază numai fluidele asupra cărora acționează **forțele volumice/masice**, iar ecuația generală a repausului se stabilește prin scrierea relațiilor de echilibru pentru **forțele masice** (greutatea) și **forțele de suprafață** (**presiuni hidrostaice**) care acționează asupra unui element de fluid (**Fig.3.2.**):

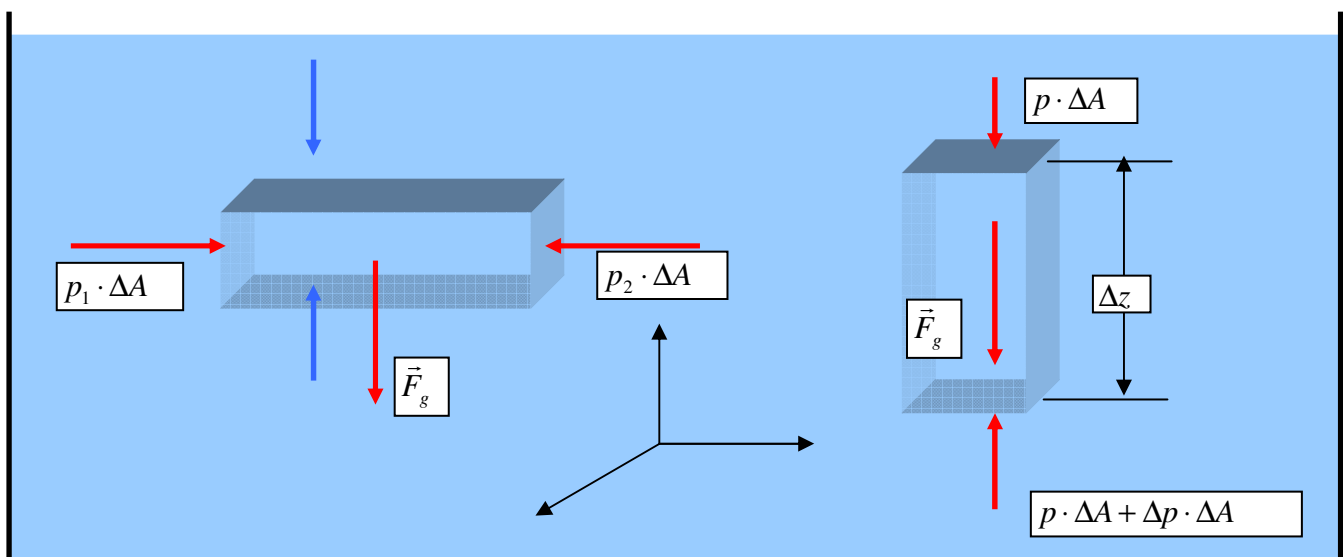


Fig.3.2. Repausul lichidelor grele incompresibile.

- **Orizontal** unde presiunea are aceeași valoare

$$p_1 \cdot \Delta A - p_2 \cdot \Delta A = 0 \Rightarrow p_1 = p_2$$

- **Vertical** unde presiunea crește cu adâncimea

$$p \cdot \Delta A + F_g - (p + \Delta p) \cdot \Delta A = 0$$

în care

$$F_g = \gamma \cdot \Delta A \cdot \Delta z$$

rezultă că

$$\Delta p = \gamma \cdot \Delta z \Leftrightarrow \frac{\Delta p}{\Delta z} = \lambda \Leftrightarrow \frac{dp}{dz} = \gamma$$

și după integrare, în cazul unui lichid greu și incompresibil, $\gamma = \text{const}$, ecuația devine:

$$p + \gamma \cdot z = \text{Const}$$

Suprafețele în ale cărei puncte presiunea este constantă se numesc **suprafețe izobare** și au ecuația de forma:

$$p(x, y, z) = \text{const.}$$

In orice punct din domeniul în care fluidul este în repaus intensitatea efortului unitar nu depinde de direcție.

Demonstrație. Fie un element de fluid de formă cilindrică separat de două suprafețe (ΔA_1) și (ΔA_2) și eforturile unitare exercitate normal la aceste suprafețe ($\Delta T_1, \Delta T_2$) (Fig.3.3.).

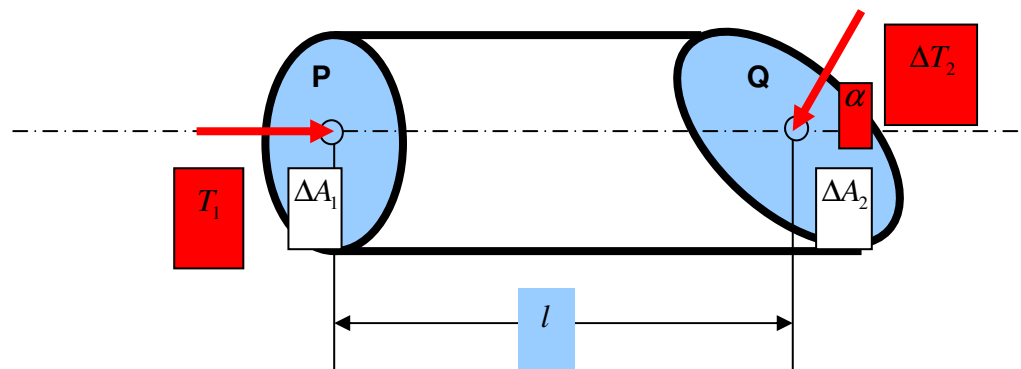


Fig. 3.3.. Într-un fluid aflat în repaus intensitatea efortului unitar (**presiunii statice**) nu depinde de direcție.

Pentru ca elementul de lichid să fie în echilibru este necesar ca toate forțele care acționează asupra lui să formeze un sistem echivalent cu zero. Ansamblul forțelor care acționează asupra cilindrului de lungime l este format din:

- Eforturile unitare exercitate de forțele de suprafață (presiunile):
 - $T_1 \cdot \Delta A_1$
 - $T_2 \cdot \Delta A_2 \cdot \cos \alpha$
- Forța de volum exercitată la suprafața laterală a cilindrului de lungime l :

$$\circ \quad \Delta \vec{F}_v = \vec{f} \cdot \rho \cdot \Delta V = \vec{f} \cdot \rho \cdot \Delta A_1 \cdot l$$

Proiecțiile pe axa Ox a tuturor forțelor conduc la condiția de echilibru:

$$T_1 \cdot \Delta A_1 - T_2 \cdot \Delta A_2 \cdot \cos \alpha + f_x \cdot \rho \cdot l \cdot \Delta A_1 = 0$$

în care pentru $l \rightarrow 0$ (punctul P coincide cu Q), deoarece $\Delta A_2 \cdot \cos \alpha = \Delta A_1$ rezultă că $T_1 = T_2$.

Aplicație: Principiul vaselor comunicante

Principiul vaselor comunicante: într-un lichid greu aflat în repaus, suprafețele izobare sunt plane horizontale.

Pentru realizarea stării de repaus condiția de echilibru este (**Fig.3.4**):

$$\rho_1 \cdot g \cdot h_1 = \rho_2 \cdot g \cdot h_2$$

dacă $\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow h_1 = h_2$

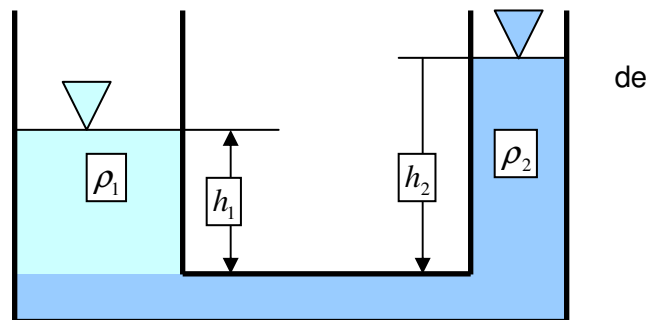


Fig.3.4. Principiul vaselor comunicante

Aplicație: Principiul lui Pascal

Principiul lui Pascal: Într-un lichid greu aflat în repaus, orice variație de presiune dintr-un punct oarecare al lichidului se transmite cu aceeași intensitate în toate punctele lichidului.

Demonstrație: Fie două puncte oarecare (P₀ și P₁; **Fig.3.5**) din domeniul ocupat de lichidul în repaus. Pentru aceste două puncte la momentul inițial se poate scrie:

(P₀): $p_0 + \gamma \cdot z_0 = C$

(P₁): $p_1 + \gamma \cdot z_1 = C$

ecuații echivalente cu relația de echilibru obținută prin scăderea celor două relații :

$$p_0 - p_1 + \gamma \cdot (z_0 - z_1) = 0$$

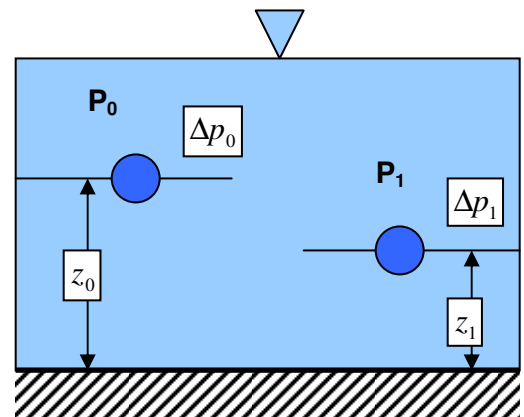


Fig.3.5. Principiul lui Pascal

Dacă printr-un procedeu oarecare se crește presiunea în punctul P_0 cu Δp_0 , pentru ca lichidul să rămână în repaus trebuie ca și în punctul P_1 să aibă loc o variație de presiune Δp_1 și presiunile în cele două puncte se modifică :

$$(P_0)': p_0 + \Delta p_0 + \gamma \cdot z_0 = C^*$$

$$(P_1)': p_1 + \Delta p_1 + \gamma \cdot z_1 = C^*$$

relația de echilibru devenind după modificarea presiunii cu menținerea stării de repaus :

$$(p_0 + \Delta p_0) - (p_1 + \Delta p_1) + \gamma \cdot (z_0 - z_1) = 0$$

Din compararea celor două ecuații ale stării de repaus pentru starea inițială și după modificarea presiunii rezultă :

$$\Delta p_0 = \Delta p_1$$

adică modificarea de presiune din punctul P_0 se transmite integral și în punctul P_1 , și în consecință în orice alt punct al domeniului aflat în repaus/echilibru.

3.3. FORMA ENERGETICA A STĂRII DE REPAUS

Presiunea exercitată de un fluid în repaus într-un punct (1) din interiorul fluidului de greutate volumică γ , în raport cu un alt punct (2) poate fi scrisă sub forma (Fig.3.6):

$$p_1 = p_2 + \gamma \cdot (z_2 - z_1) \Leftrightarrow z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} = z + \frac{p}{\gamma} = \text{const}$$

deoarece punctele (1) și (2) pot fi oricare două puncte din interiorul fluidului.

Înmulțind cu $m \cdot \vec{g}$ (greutatea unei particule de masă m) ambii termeni ai ecuației finale se obține ecuația **conservării energiei** pentru fluidele grele în stare de repaus în câmp gravitațional:

$$m \cdot \vec{g} \cdot z + m \cdot \vec{g} \cdot \frac{p}{\gamma} = \text{const}$$

în care

$m \cdot \vec{g} \cdot z$ -energia potențială de poziție a particulei

$m \cdot \vec{g} \cdot \frac{p}{\gamma}$ -energia potențială de presiune.

Presiunile se exprimă frecvent în metri coloană de lichid, modalitate de exprimare care permite o reprezentare grafică sugestivă legată direct de instrumentul clasice de măsurare (tubul piezometric).

Raportate la un plan orizontal de referință, de o anumită cotă, presiunile sunt:

- **Presiune barometrică**, totală sau absolută, măsurată cu ajutorul unui tub piezometric închis, care la suprafața lichidului din tub are vid absolut.
- **Presiunea manometrică** relativă se măsoară într-un tub piezometric deschis care are la suprafața liberă a fluidului din tub o presiune egală cu presiunea atmosferică.

Diferența dintre presiunea barometrică și manometrică este **presiunea atmosferică**:

$$p_b - p_m = p_{at}$$

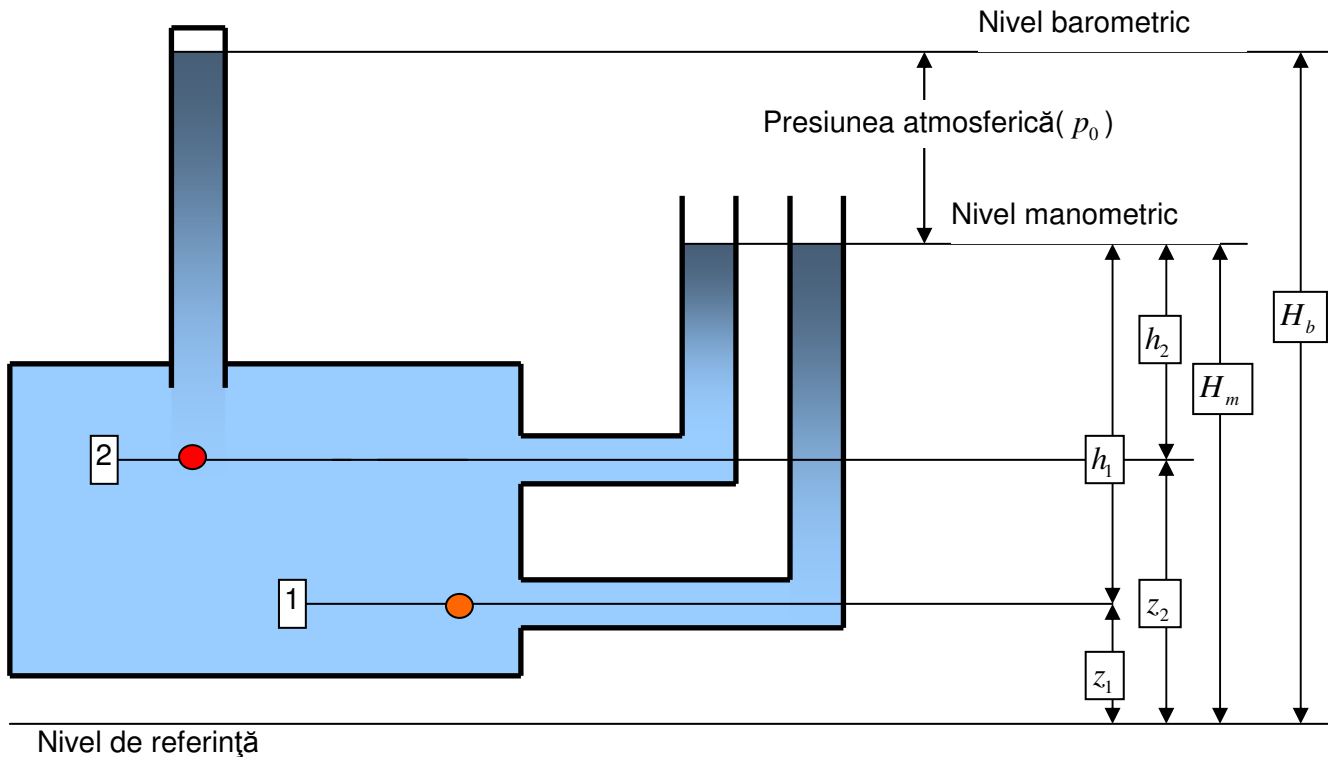


Fig.3.6. Presiunea barometrică și presiunea manometrică

Presiunile din interiorul lichidelor și **energia potențială** a particulelor dintr-un domeniu se pot exprima sub diverse forme și au denumiri specifice (**Fig.3.6**):

- Presiunea barometrică în punctul (1): $p_{b1} = \gamma \cdot h_1 + p_0$
- Presiunea barometrică în punctul (2): $p_{b2} = \gamma \cdot h_2 + p_0$
- Presiunea manometrică în punctul (1): $p_{m1} = \gamma \cdot h_1$
- Presiunea manometrică în punctul (2): $p_{m2} = \gamma \cdot h_2$
- Sarcina hidrostatică absolută: $H_b = z_1 + h_1 + \frac{p_0}{\gamma_{H_2O}} = z_2 + h_2 + \frac{p_0}{\gamma_{H_2O}}$
- Sarcină hidrostatică relativă/manometrică: $H_m = z_1 + h_1 = z_2 + h_2$

Presiunea atmosferică se exprimă în două forme:

- **Presiunea atmosferică fizică** (atm):

$$1atm = \gamma_{mercur} \cdot h = 13590 \cdot 0,76 = 10333 \frac{kgf}{m^2} = 101324 Pa \approx 10m_{colH_2O}$$

- **Presune atmosferică tehnică** (at)

$$1at = 10^4 \frac{kgf}{m^2} = 98066,5 Pa$$

Presiunea se exprimă în diverse unități de măsură:

- $1 \frac{kgf}{cm^2} = 9,80665 \cdot 10^4 \frac{N}{m^2} = 1at$
- $1Torr = 1mmHg = \frac{1}{760} atm = 133,322387415 \frac{N}{m^2}$ (**Fig.3.7**)
- $1mmH_2O = 1 \cdot 10^{-4} at = 1 \frac{kgf}{m^2} = 9,81 \frac{N}{m^2}$
- $1bar = 750,062Torr = 0,986923 = 100000 Pa = 0,987 atm = 10mcolH_2O$

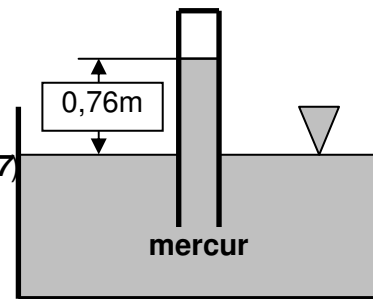


Fig.3.7. Experiența lui Torricelli

$$100000 Pa = 10mcolH_2O$$

3.4. DIAGrame DE PRESIUNI

Construirea diagramelor de presiune se bazează pe două principii:

- presiunea hidrostatică variază liniar cu adâncimea

$$p = p_0 + \gamma \cdot h$$

- presiunea hidrostatică este normală la suprafață

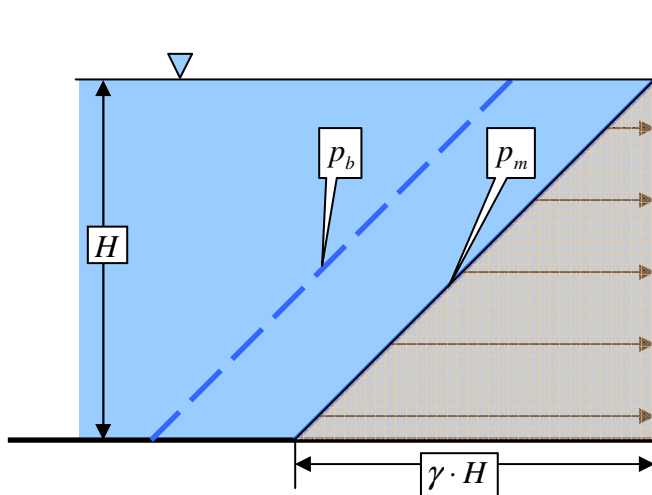


Fig. 3.8. Diagrama de presiuni pe un perete vertical solicitat pe o singură față (γ -constant).

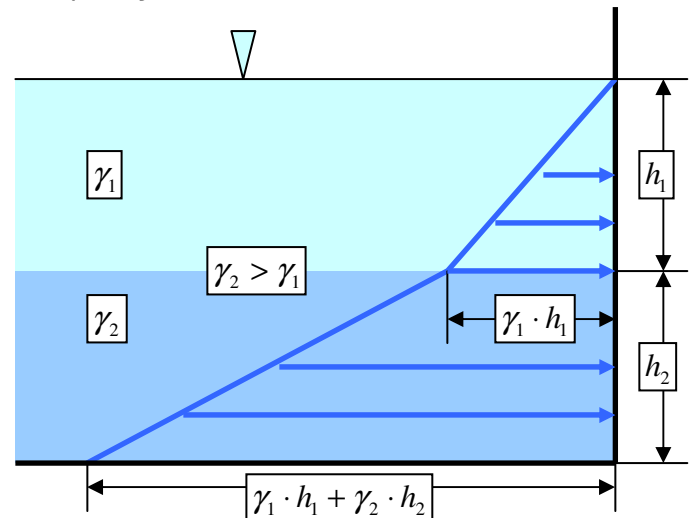


Fig.3.9. Diagrama presiunilor a două lichide nemiscibile cu greutăți volumice diferite, pe un perete vertical solicitat pe o singură față

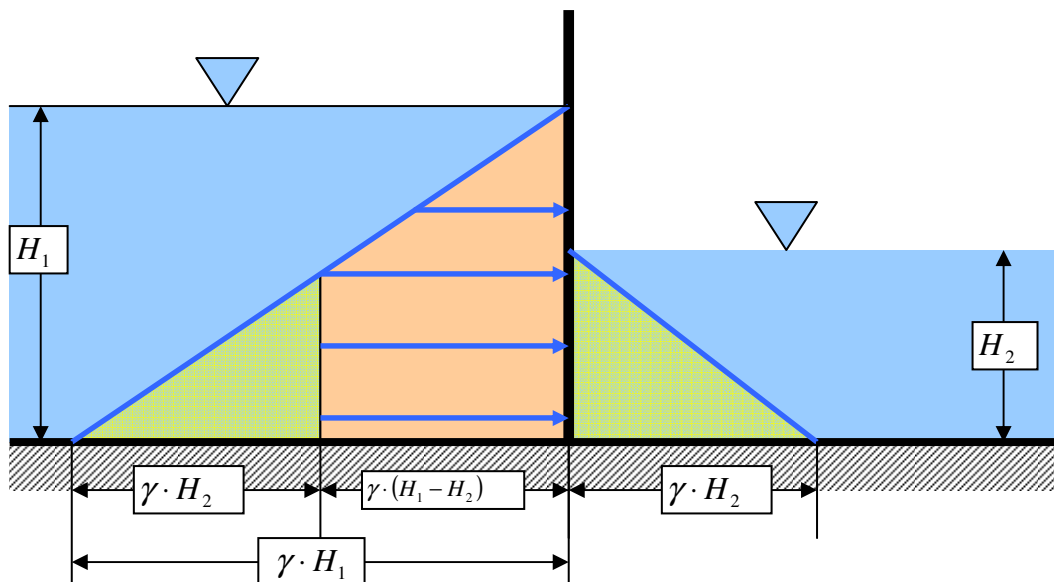


Fig.3.10. Diagrama presiunilor pe un perete vertical solicitat pe ambele fețe.

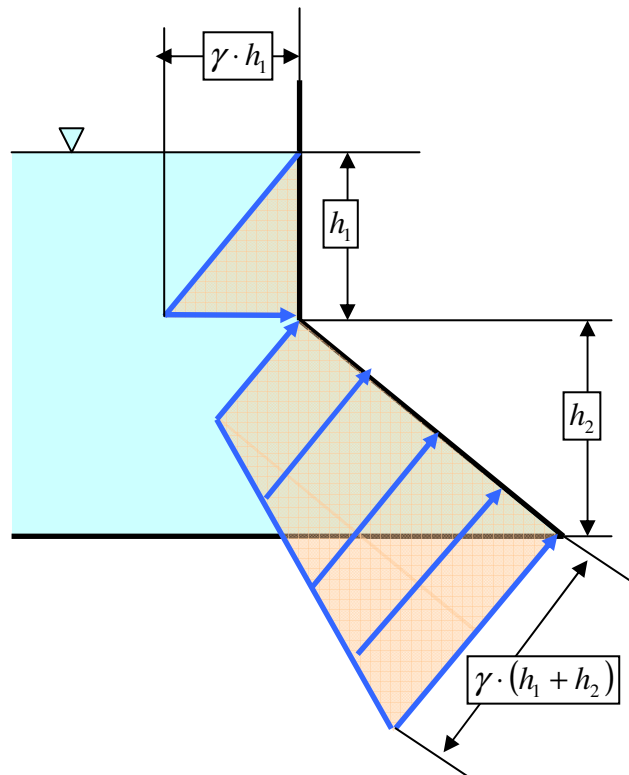


Fig.3.11. Diagramă de presiuni pe un perete vertical frânt

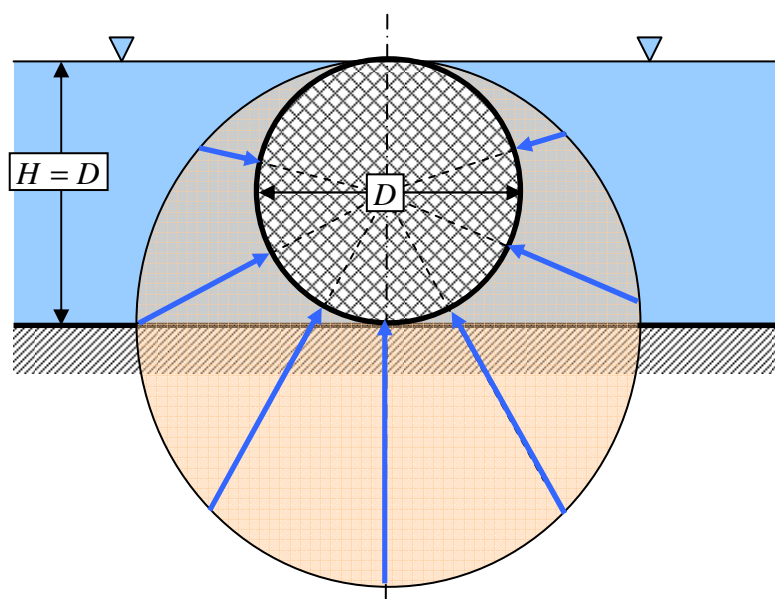


Fig.3.12. Diagrama presiunilor pe o suprafață cilindrică

3.5. FORȚE HIDROSTATICE

- Forțele hidrostatice** sunt efectul acțiunii presiunilor hidrostatice, și sunt forțe care acționează pe:
- **suprafețe plane**, când sistemul de forțe rezultat este compus dintr-un sistem de forțe paralele care au rezultantă unică ce se aplică în centrul de greutate al suprafeței plane;
 - **suprafețe curbe deschise**, când sistemul de forțe este tridimensional și poate fi exprimat în două forme:
 - o forță rezultantă și un moment
 - trei forțe neconcurente orientate paralel cu axele sistemului de referință.
 - **suprafețe închise** când efectul se manifestă sub forma unei forțe verticale ascendente (**forța arhimedică**) egală cu greutatea lichidului deplasat de suprafața închisă.

3.5.1. Forțe hidrostatice pe suprafețe plane

Forța hidrostatică (dF_p) pe un element de suprafață (dA) plasat într-un plan care face cu orizontala unghiul α este (**Fig. 3.13**):

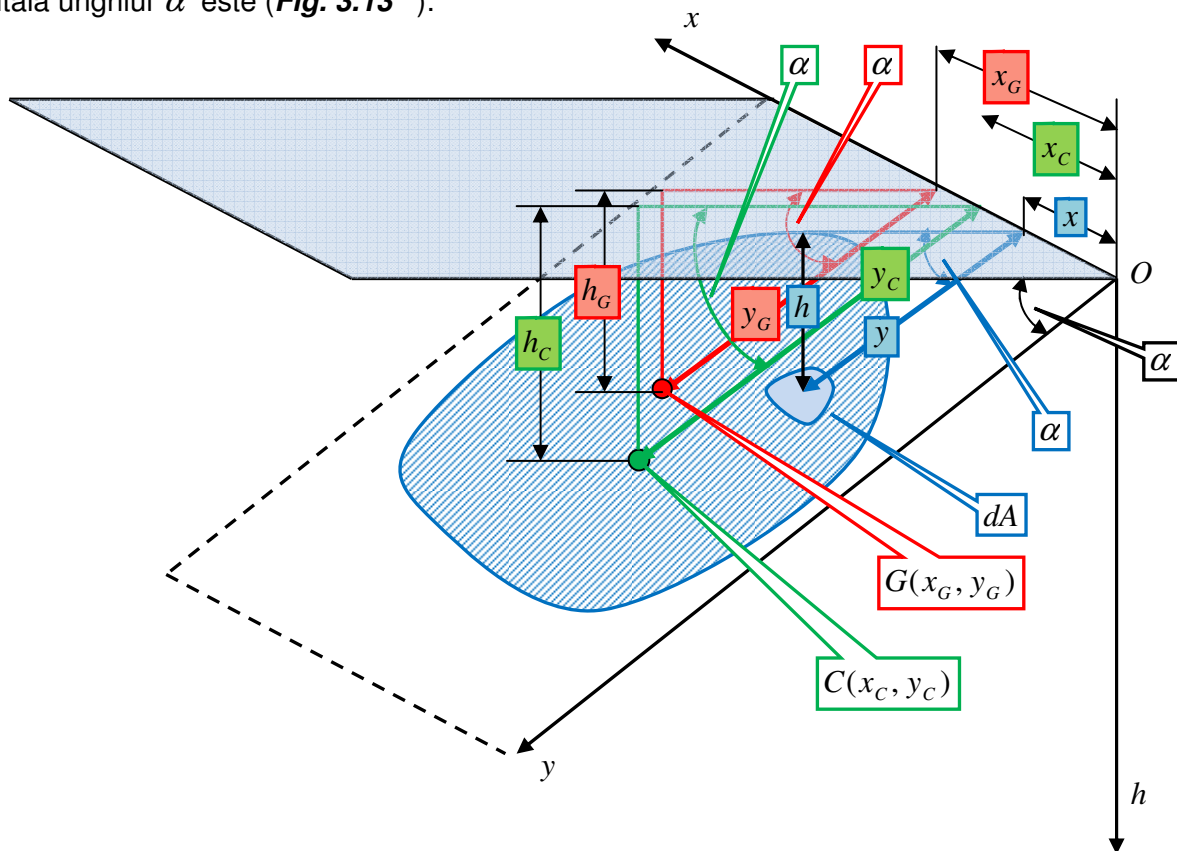


Fig.3. 13. Forțe hidrostatice pe suprafețe plane

$$dF_p = p \cdot dA$$

în care înlocuind:

$$p = \gamma \cdot h = \gamma \cdot y \cdot \sin \alpha$$

se obține:

$$dF_p = \gamma \cdot y \cdot \sin \alpha \cdot dA$$

și prin integrare pe toată suprafața A conduce la:

$$F_p = \int \gamma \cdot y \cdot \sin \alpha \cdot dA = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot y_G \cdot A = \gamma \cdot h_G \cdot A$$

Forța de presiune pe o suprafață plană are următoarele caracteristici:

- **modulul** egal cu greutatea lichidului din cilindrul cu baza A și generatoarea egală cu adâncimea centrului de greutate (h_G) al suprafeței;
- **orientată** normal la suprafața A și acționează dinspre lichid spre suprafața plană;
- **punctul de aplicație** este centrul de presiune al suprafeței $C(x_C, y_C)$, ale cărui coordonate se calculează cu ajutorul ecuațiilor momentelor:

$$F_p \cdot y_C = \int_A y \cdot dF_p$$

$$F_p \cdot x_C = \int_A x \cdot dF_p$$

în care înlocuind expresia forței de presiune se obțin ecuațiile:

$$\gamma \cdot y_G \cdot \sin \alpha \cdot A \cdot y_C = \int_A y \cdot \gamma \cdot y \cdot \sin \alpha \cdot dA \Leftrightarrow y_G \cdot A \cdot y_C = \int_A y^2 \cdot dA$$

$$\gamma \cdot y_G \cdot \sin \alpha \cdot A \cdot x_C = \int_A x \cdot \gamma \cdot y \cdot \sin \alpha \cdot dA \Leftrightarrow y_G \cdot A \cdot x_C = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

din care rezultă:

$$x_C = \frac{1}{A \cdot y_G} \int_A x \cdot y \cdot dA \quad \text{și} \quad y_C = \frac{1}{A \cdot y_G} \int_A y^2 \cdot dA$$

Momentele de inerție ale suprafețelor plane sunt:

- moment axial de ordinul doi:

$$I_{Ox} = \int_A y^2 \cdot dA \quad I_{Oy} = \int_A x^2 \cdot dA$$

- moment centrifugal față de axele xOy

$$I_{xOy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

- moment de inerție polar față de punctul O , la suprafețe axial simetrice este:

$$I_p = \int_A r^2 \cdot dA = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA = I_{Ox} + I_{Oy}$$

în care r este distanța de la elementul dA la originea O .

Dacă una dintre axe este axă de simetrie, atunci momentul centrifugal de inerție este nul.

Formulele lui STEINER

Momentul de inerție față de o axă oarecare este egal cu momentul de inerție față de o axă paralelă, care trece prin centrul de greutate al suprafeței, plus produsul ariei suprafeței cu pătratul distanței între cele două axe (d):

$$I_{Ox} = I_{(Ox)'} + A \cdot d^2$$

Momentul centrifugal față de două axe oarecare este egal cu momentul de inerție centrifugal față de axe paralele care trec prin centrul de greutate al suprafeței, plus produsul ariei cu distanțele între cele două axe:

$$I_{xOy} = I_{(xOy)'} + A \cdot d_x \cdot d_y$$

Aplicație: Forțe hidrostatice pentru suprafețe plane regulate

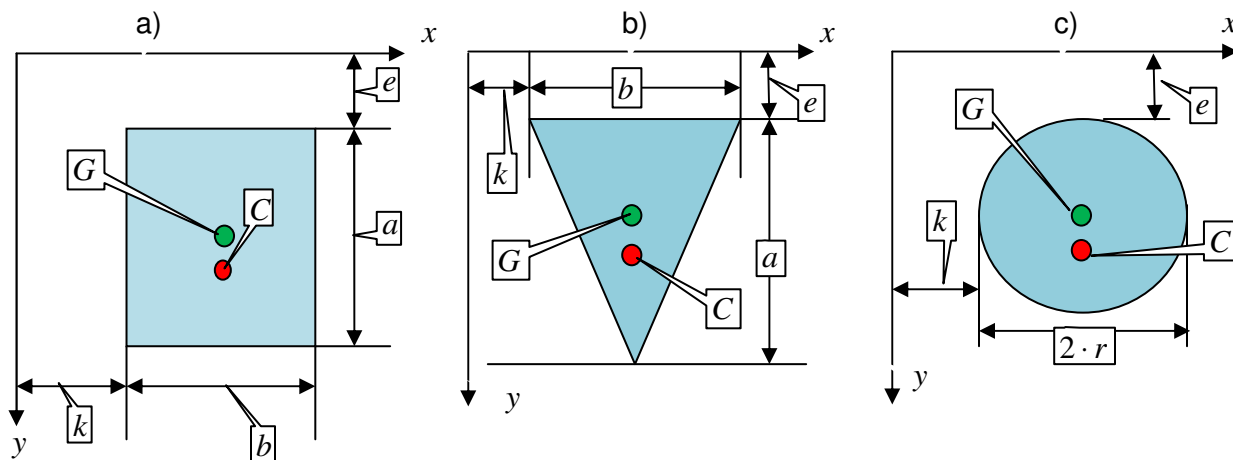


Fig.3.14. Forțe hidrostatice și centre de presiune (C) pentru : a) dreptunghi, b) triunghi isoscel; c) cerc (G centru de greutate)

$$F_p = \gamma \cdot a \cdot b \cdot \left(e + \frac{a}{2} \right) \cdot \sin \alpha \quad F_p = \frac{1}{6} \gamma \cdot a \cdot b \cdot (3 \cdot e + a) \cdot \sin \alpha \quad F_p = \gamma \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (e + r) \cdot \sin \alpha$$

$$x_c = k + \frac{b}{2} \quad x_c = k + \frac{b}{2} \quad x_c = k + r$$

$$y_c = e + \frac{a}{3} \cdot \frac{3 \cdot e + 2 \cdot a}{2 \cdot e + a} \quad y_c = e + \frac{a}{2} \cdot \frac{2 \cdot e + a}{3 \cdot e + a} \quad y_c = e + 4 + \frac{1}{r} \cdot \frac{r^2}{e + r}$$

Aplicație: Forța hidrostatică pe o suprafață plană sollicitată pe o singură față (m. grafică)

Metoda grafică de calcul a forței hidrostatice are la bază reprezentarea diagramei de presiuni pe suprafața pe care se calculează forța hidrostatică.

Pentru o suprafață plană verticală sollicitată pe o singură față diagrama de presiuni are o formă triunghiulară (fig. 3.15). Forța hidrostatică exercitată pe o suprafață elementară dA este:

$$dF = p \cdot dA = \gamma \cdot z \cdot dA$$

și are semnificația geometrică de volum al unei prisme cu baza dA și înălțimea $\gamma \cdot z$.

Forța hidrostatică totală (F) exercitată pe toată suprafața ($A = L \cdot H$) se obține prin însumarea forțelor elementare de pe întreaga suprafață:

$$F = \int_A \gamma \cdot z \cdot dA = \int_{W_\gamma} dW_\gamma = W_\gamma$$

și corespunde **corpului de presiune** obținut prin ridicarea în fiecare punct al suprafeței A a unui segment de mărime $\gamma \cdot z$, perpendicular pe suprafață.

În cazul suprafeței verticale sollicitat pe o singură față (Fig.2...) corpul de presiune este o prismă triunghiulară cu baza un triunghi dreptunghic cu suprafața $S = \frac{H \cdot \gamma \cdot H}{2}$ și înălțimea L , rezultând o forță totală:

$$F = \frac{\gamma \cdot H^2}{2} \cdot L$$

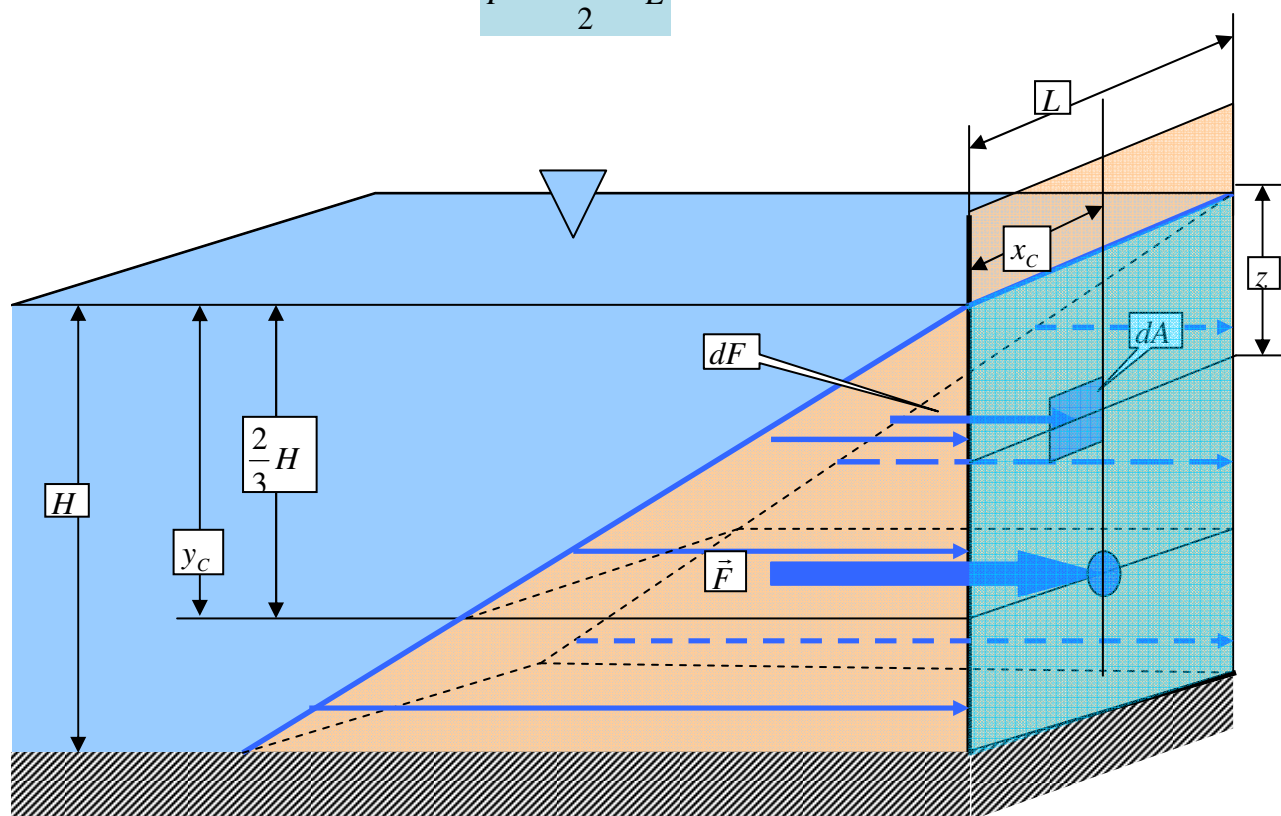


Fig.3.15. Forța hidrostatică pe o suprafață plană verticală sollicitată pe o singură față.

forță care se aplică la $\frac{2}{3} \cdot H$ de la suprafața lichidului.

Forța hidrostatică se aplică pe în **centrul de presiune C** al suprafeței pe care se exercită. Pentru stabilirea coordonatelor centrului de presiune se scriu ecuațiile de **momente** în raport cu axele de rotație ale suprafeței pe care se exercită presiunea (axa Oz și axa Ox). În cazul suprafeței rectangulate verticale ($L \cdot H$) (**Fig.3.15**) :

$$\bullet \quad x_c = \frac{L}{2} \quad \text{și} \quad y_c = \frac{2}{3} H$$

Aplicație: Forța hidrostatică pe o suprafață plană solicitată pe ambele fețe (m. grafică)

Solicitarea pe ambele fețe ale suprafeței de lungime $L = 150m$ se realizează de două lichide cu greutateți volumice diferite: $\gamma_1 = 1,0 \frac{tf}{m^3}$ și $\gamma_2 = 1,6 \frac{tf}{m^3}$. Înălțimile coloanei de apă sunt $H_1 = 70m$ și $H_2 = 40m$. Să se calculeze intensitatea forței hidrostatice totale și poziția punctului de aplicare al acesteia.

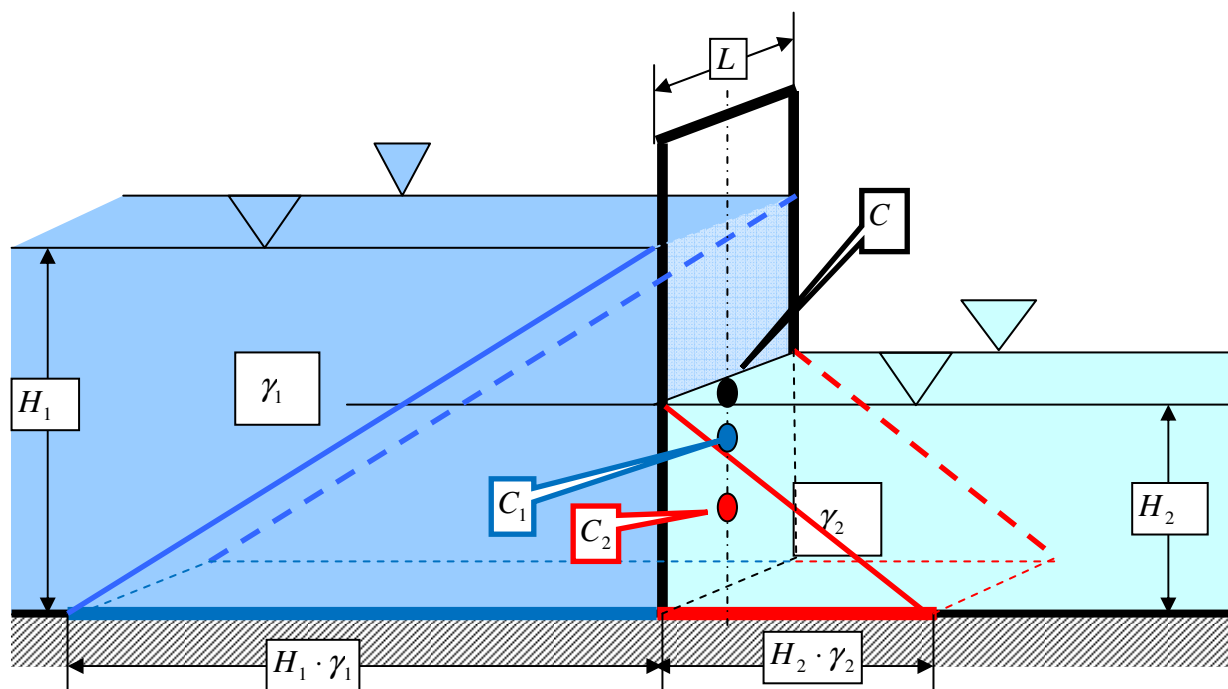


Fig.3.16. Diagrama presiunilor pe un perete vertical solicitat pe ambele fețe.

Rezolvare:

Formula de calcul pentru forța hidrostatică are două componente (Fig.2....):

- **forța hidrostatică pe față 1, dată de prisma cu baza triunghiulară** (F_1) formată din lichid cu greutate volumică γ_1 :

$$F_1 = \frac{H_1^2 \cdot \gamma_1}{2} \cdot L$$

cu centrul de presiune C_1 în punctul de coordonate:

$$x_{C_1} = \frac{L}{2} \quad \text{și} \quad y_{C_1} = \frac{2}{3} \cdot H_1$$

- **forța hidrostatică pe față 2, dată de prisma cu baza triunghiulară** (F_2):

$$F_2 = \frac{\gamma_2 \cdot H_2^2}{2} \cdot L$$

cu centrul de presiune C_2 în punctul de coordonate:

$$x_{C_2} = \frac{L}{2} \quad \text{și} \quad y_{C_2} = \frac{2}{3} \cdot H_2$$

- **rezultanta celor doua forțe este** (F)

$$F = F_1 - F_2 = \frac{L}{2} \cdot (H_1^2 \cdot \gamma_1 - H_2^2 \cdot \gamma_2)$$

cu centrul de presiune C :

$$x_C = \frac{L}{2}$$

și y_C obținut din ecuația de momente:

$$F \cdot CO = F_1 \cdot C_1O - F_2 \cdot C_2 \cdot O$$

$$CO = \frac{F_1 \cdot C_1O - F_2 \cdot C_2O}{F} = \frac{\frac{L}{2} \cdot H_1^2 \cdot \gamma_1 \cdot \frac{H_1}{3} - \frac{L}{2} \cdot H_2^2 \cdot \gamma_2 \cdot \frac{H_2}{3}}{\frac{L}{2} \cdot (H_1^2 \cdot \gamma_1 - H_2^2 \cdot \gamma_2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{H_1^3 \cdot \gamma_1 - H_2^3 \cdot \gamma_2}{H_1^2 \cdot \gamma_1 - H_2^2 \cdot \gamma_2}$$

$$y_C = H_1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{H_1^3 \cdot \gamma_1 - H_2^3 \cdot \gamma_2}{H_1^2 \cdot \gamma_1 - H_2^2 \cdot \gamma_2}$$

3.5.2. Forțe hidrostatice pe suprafețe curbe deschise

În cazul unei suprafețe curbe deschise care mărginește un lichid greu aflat în repaus pe fiecare element infinitesimal dS se exercită o forță hidrostatică elementară $d\vec{F}$, normală la elementul respectiv. Mulțimea forțelor hidrostatice elementare constituie un sistem de forțe oarecare, sistem care nu se reduce la o rezultantă unică, ci la un torsor.

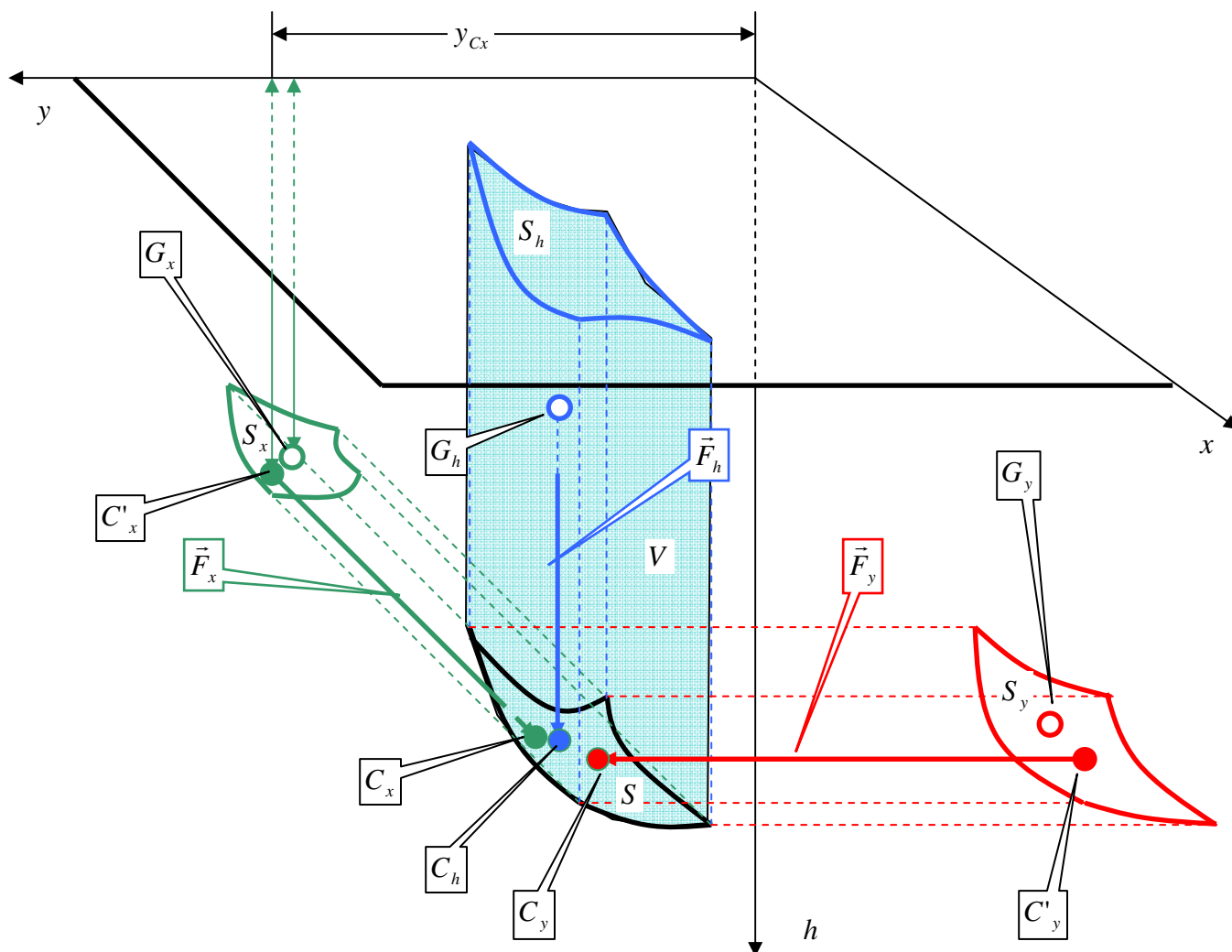


Fig.3.17. Forțe hidrostatice pe suprafețe curbe deschise

Evaluarea forțelor hidrostatice pe suprafețele curbe deschise se bazează pe descompunerea forțelor elementare după axele triedrului ortogonal $Oxyh$ (**Fig.3.17**):

$$d\vec{F} = dF_x \cdot \vec{i} + dF_y \cdot \vec{j} + dF_z \cdot \vec{k}$$

rezultând **trei sisteme de forțe paralele**, fiecare sistem reducându-se la o rezultantă:

$$\vec{F}_x = \vec{i} \cdot \int_S dF_x; \quad \vec{F}_y = \vec{j} \cdot \int_S dF_y; \quad \vec{F}_h = \vec{k} \cdot \int_S dF_h$$

Intensitatea forțelor hidrostatice exercitate de un lichid greu în repaus, într-o direcție oarecare din **planul orizontal**, asupra unei suprafețe curbe care îl mărginește, este egală cu intensitatea forței care se exercită pe proiecția suprafeței curbe pe un plan normal la direcția considerată.

Intensitatea forței de presiune **verticală** exercitată asupra suprafeței curbe este egală cu intensitatea greutateii **cilindrului vertical** (V) de lichid limitat de suprafața curbă, planul suprafeței libere și verticalele ca întâlnesc conturul suprafeței curbe.

Pe elementul de suprafață dS de arie dA se exercită forța de presiune $d\vec{F}$ normală la dS și având intensitatea:

$$dF = (p^* + \gamma \cdot h) \cdot dA - p^* \cdot dA = \gamma \cdot h \cdot dA$$

Dacă unghiul dintre normala exterioară la suprafață dS și sensul pozitiv al axei Ox este α , atunci rezultă că:

$$dF_x = dF \cdot \cos \alpha = \gamma \cdot h \cdot dA \cdot \cos \alpha = \gamma \cdot h \cdot dA_x$$

și ținând cont de teorema momentelor statice se obține pentru cele trei rezultante:

$$F_x = \int_S dF_x = \gamma \cdot \int_{S_x} h \cdot dA_x = \gamma \cdot h_{Gx} \cdot A_x$$

$$F_y = \int_S dF_y = \gamma \cdot \int_{S_y} h \cdot dA_y = \gamma \cdot h_{Gy} \cdot A_y$$

$$F_h = \int_S dF_h = \gamma \cdot \int_{S_h} h \cdot dA_h = \gamma \cdot \int_V dV = \gamma \cdot V$$

în care A_x, A_y, A_h sunt ariile proiecțiilor suprafeței S pe planele Oyh, Oxh respectiv Oxy , V este **volumul cilindrului vertical** iar h_{Gx}, h_{Gy} sunt adâncimile centrelor de greutate ale suprafețelor S_x respectiv S_y .

Forțele de presiune se aplică în **centrele de presiune** ale suprafeței $S(C_x, C_y, C_h)$ și pentru determinarea centrului de presiune C_x se aplică teorema lui Varignon:

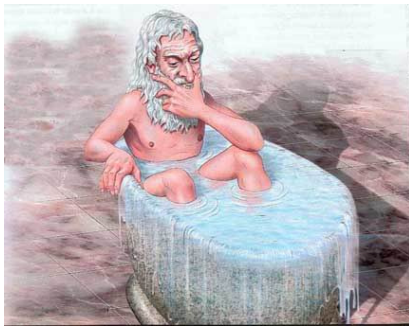
$$y_{C_x} \cdot F_x = \int_S y \cdot dF_x = \int_{S_x} y \cdot \gamma \cdot h \cdot dA_x = \gamma \int_{S_x} y \cdot h \cdot dA_x = \gamma \cdot I_{yh} \Rightarrow y_{C_x} = \frac{I_{yh}}{h_{Gx} \cdot A_x}$$

$$h_{C_x} \cdot P_x = \int_S h \cdot dF_x = \int_{S_x} h \cdot \gamma \cdot h \cdot dA_x = \gamma \int_{S_x} h^2 \cdot dA_x = \gamma \cdot I_y \Rightarrow h_{C_x} = \frac{I_y}{h_{Gx} \cdot A_x}$$

În care I_{yh}, I_y sunt momentul centrifugal al lui S_x în raport cu Oyh , respectiv momentul de inerție în raport cu axa Oy .

Centrul de presiune C_h se află la intersecția lui S cu verticală dusă din centrul de greutate al G_h al volumului V .

3.5.3. Forțe hidrostactice pe suprafețe închise



Teorema lui Archimede: Un lichid greu aflat în repaus exercită asupra unui solid cufundat în el o forță verticală ascendentă a cărei intensitate este egală cu cea a greutateii lichidului dezlucuit de solid.

Deoarece în plan orizontal

$$P_x = P_y = 0$$

stabilitatea corpului solid este realizată prin echilibrarea:

- **forțelor hidrostactice** elementare dF_1, dF_2 care acționează pe verticală asupra elementelor de suprafață dA_1, dA_2 și care fac cu sensul pozitiv al axei verticale unghiurile α_1, α_2 ;
- **forța masică** $\vec{F}_g$:

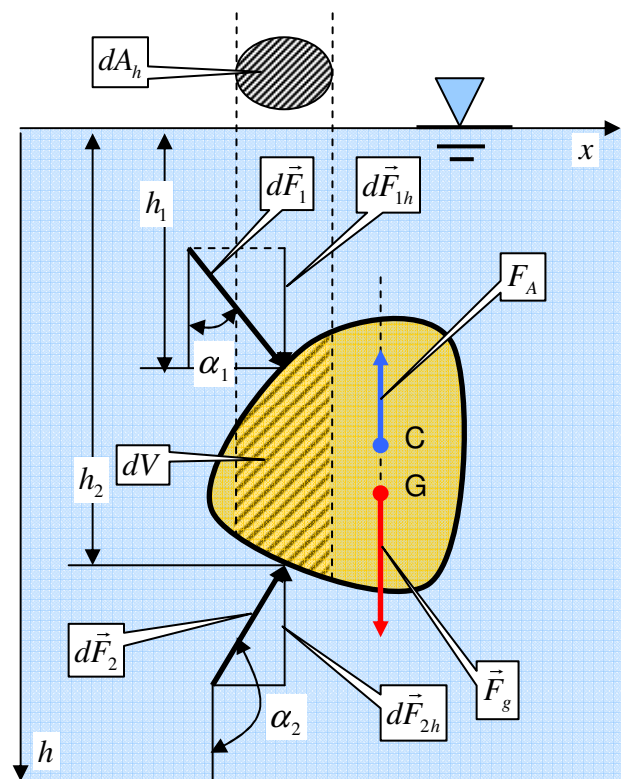


Fig.3.18. Principiul lui Archimede

$$dF_{1h} = (p_0 + \gamma \cdot h_1) \cdot dA_1 \cdot \cos \alpha_1 = (p_0 + \gamma \cdot h_1) \cdot dA_h$$

$$dF_{2h} = (p_0 + \gamma \cdot h_1) \cdot dA_1 \cdot \cos \alpha_2 = -(p_0 + \gamma \cdot h_2) \cdot dA_h$$

$$dF_h = dF_{1h} + dF_{2h} = -\gamma \cdot (h_2 - h_1) \cdot dA_h = -\gamma \cdot dV \Rightarrow F_h = -\gamma \int_V dV = -\gamma \cdot V$$

$$F_A = \gamma \cdot V$$

Forța arhimedică (F_A) se aplică în centrul de greutate C al **volumului de lichid dezlucuit**. În funcție de relația dintre forțele hidrostactice și cele masice se disting mai multe situații:

- Corpul solid rămâne în repaus dacă:
 - $F_A = F_g$
 - F_A și F_g au același suport (C și G sunt pe aceeași verticală)
- Corpul solid urcă pe verticală până ce iese parțial din lichid dacă:
 - $F_g < F_A$
- Corpul solid se scufundă până la fundul bazinului dacă:
 - $F_g > F_A$

Dacă solidul este imersat în lichide de densități diferite forța arhimedică se calculează cu o relație de tipul:

$$F_A = \sum_{i=1}^{i=k} \rho_i \cdot g \cdot V_i$$

În care

ρ_i -densitatea fluidului i

g - accelerația gravitațională

V_i - volumul imersat în fluidul de densitate ρ_i

Echilibrul stabil al corpurilor imersate complet în lichide grele în repaus este asigurat dacă centrul de greutate al solidului este situat sub centrul de greutate al volumului de lichid deplasat.

