2.3. Ecuaţiile diferenţiale de mişcare

Condiţile de mişcarea ale unui lichid se exprimă prin ecuaţii de echilibru între forţele care acţionează asupra fiecărei particule de lichid:

- Forţele de masice;
- Forţele de inerţie
- Forţele de tensiune

Echilibrul celor trei categorii de forte se scrie pentru o particulă infinitezimală de lichid de forma unui paralelipiped elementar (dx, dy, dz; ***Fig.2.2***). Vârful paralelipipedului elementar de fluid plasat în originea sistemului de referinţă (O) este deplasat cu:

- viteza $\vec{v}$, ale cărei componente de-a lungul celor trei axe de coordonate sunt: v_x, v_y, v_z
- acceleraţia $\vec{a}$, cu componenetele axiale: a_x, a_y, a_z.

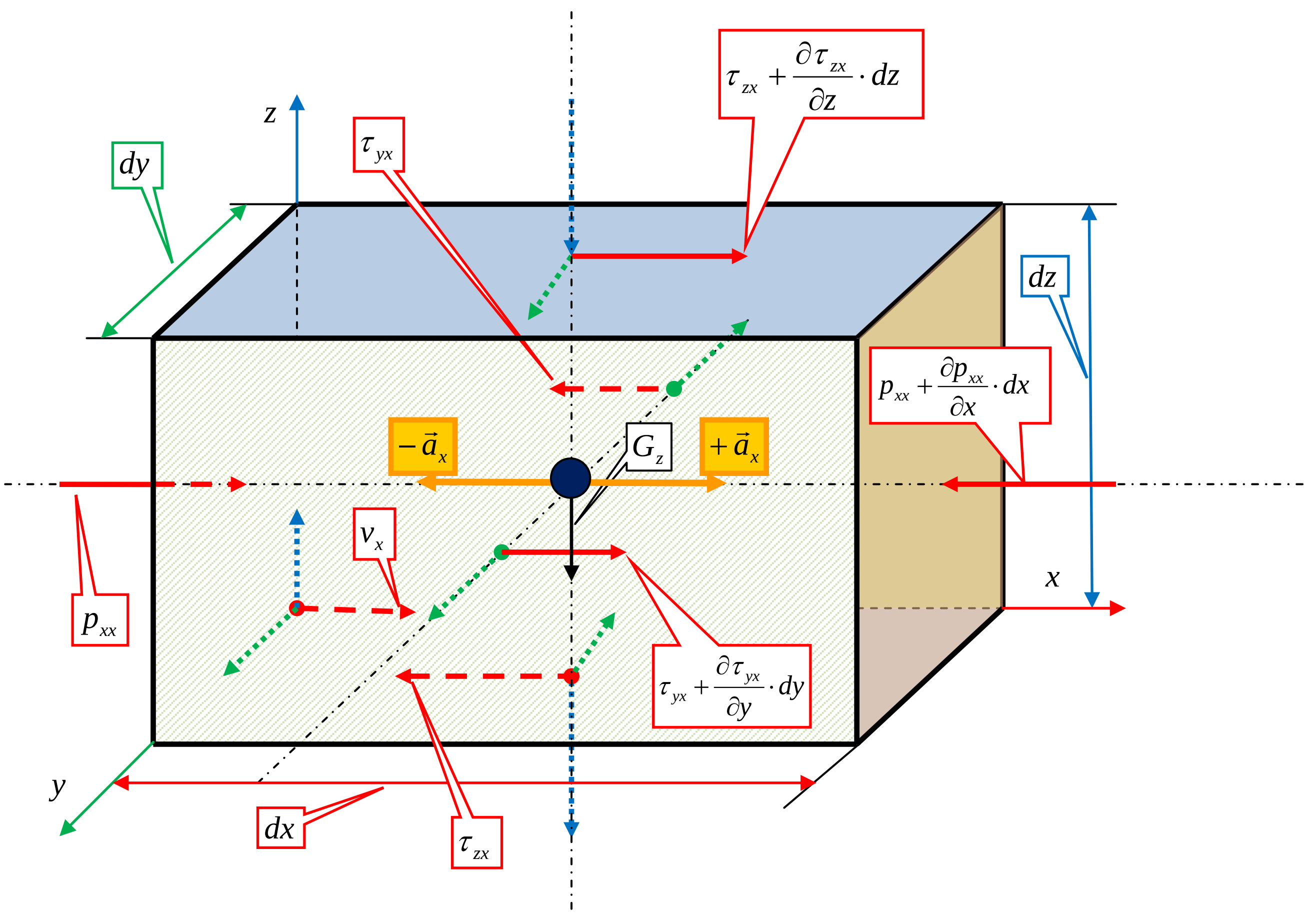

Fig. 2.2.*Starea de tensiune pe feţele unei particule de lichid*
(sunt "nominalizate" numai componentele paralele cu axa Ox, cu excepţia forţei masice G_z*)*

Forţele masice sunt aplicate în centrul elementului paralelipipedic, iar componentele paralele cu axele sistemului de referinţă sunt: G_x, G_y, G_z (G_z fiind singura componentă nenulă în câmpul gravitaţional).

Forţele de tensiune pe feţele paralelipipedului sunt:

- normale (presiunile), notate cu doi indici (primul al normalei la suprafaţa pe care este perpendiculară, al doilea cel al direcţiei presiunii): p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}.
- tangenţiale notate cu acelaşi sistem de indici (primul indice al normalei pe suprafaţa în care este cuprinsă forţa de tensiune, al doilea al axei cu care este paralelă forţa de tensiune): $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$

Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării se scriu:

- proiectând toate forţele pe axele de coordonate OX,OY, OZ.
- ţinând seama de variatiile infinitezimale raportate la dimensiunile dx, dy, dz ale elemetului paralelipipedic.

Procedura pentru axa OX este:

- proiecţia forţelor masice şi de inerţie este:

$$G_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz - a_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \rho \cdot (G_x - a_x) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

- proiecţia forţelor de presiune, perpendiculare pe feţele paralele cu planul YOZ, este:

$$p_{xx} \cdot dy \cdot dz - \left(p_{xx} \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \right) = -\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

- proiecţia forţelor tangenţiale din feţele elementului paralelipipedic care dau componente paralele cu axa OX:
  - pe feţele paralele cu XOY:

$$-\tau_{zx} \cdot dx \cdot dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot dx \cdot dy = -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

  - pe feţele paralele cu XOZ:

$$-\tau_{yx} \cdot dx \cdot dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx \cdot dz = -\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

- echilibrarea proiecţiilor tuturor forţelor pe axa OX se sintetizează prin însumarea lor şi egalarea cu zero:

$$\rho \cdot (G_x - a_x) \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

Prin reducerea termenilor comuni dx, dy, dz şi repetarea procedurii pentru axele OY, OZ se obţine sistemul de ecuaţii diferenţiale ale mişcării mediului lichid (Navier):

$$OX : \rho \cdot (G_x - a_x) - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$OY : \rho \cdot (G_y - a_y) - \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0$$

$$OZ : \rho \cdot (G_x - a_x) - \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$$

Acceleraţia se exprima prin derivatele substanţiale în raport cu:

- spaţiul (x, y, z) şi
- timpul (t):

$$a_x = \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{Dv_y}{Dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{Dv_z}{Dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Ecuaţiile diferenţiale de mişcare (Navier) conţin un număr mare de parametri necunoscuţi care se pot afla asociind un număr suplimentar de ecuaţii care exprimă:

- *Legea conservării masei* (*principiul continuităţii*) care stabileşte cã orice ***modificare a masei de apã*** dintr-un ***volumul elementar:*** $dx \cdot dy \cdot dz$, trebuie sã fie compensatã de o ***modificare a debitului de apă*** care iese din acel volum sau o ***modificare a masei de apã stocatã*** în acel volum.
- *Legea conservării energiei* (*principiul întâi al termodinamicii*) care precizează cã în orice sistem închis, suma tuturor formelor de energie este constantă.(*Al doilea principiu al termodinamicii*, completeazã imaginea proceselor de transformare a diferitelor forme de energie, precizând cã această transformare se produce de la forme utile, cum ar fi cea mecanicã, la altele mai puţin utile, cum ar fi cea termicã).
- Deformabilitatea lichidelor ($\beta ; \alpha ; p = \rho_w \cdot g \cdot h$)
- Starea fizică a lichidului ($\rho_w = f(p, T)$)
- Funcţia de vâscozitate ($\mu = f(T); \tau = \mu \frac{dv}{dn}$)