

5.2.1. Mișcarea permanentă în fisuri și conducte rectilinii	1
5.2.1.1. Modelul de calcul pentru mișcarea permanentă în fisuri	1
5.2.1.2. Modelul de calcul pentru mișcarea permanentă în conductă rectilinie	4
5.2.1.3. Succesiunea prelucrărilor	6
5.2.2.4. Întrebări care ...așteaptă răspuns	6

5.2.1. Mișcarea permanentă în fisuri și conducte rectilinii

Problemele rezolvate cu ecuațiile generale Navier-Stokes se împart în două categorii :

- **cu soluții exacte** pentru domenii spațiale cu geometrie simplă și omogenitate parametrică ;
- **cu soluții aproximative**, pentru domenii spațiale complexe și heterogenități parametrică., care impun rezolvare numerică.

Pentru exemplificare propunem două probleme, **cu soluții exacte**:

- mișcare permanentă în fisuri
- mișcare permanentă în conductă rectilinie

5.2.1.1. Modelul de calcul pentru mișcarea permanentă în fisuri

Ecuația generală a mișcării unui fluid real (greu, cu vâscozitate și incompresibil) de-a lungul axei (Ox) este:

$$(Ox): g_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

Pentru o fisură plasată în **câmp gravitațional**, cu **pereții verticali** și **paraleli** cu axa Ox , cu o curgere **permanentă** și **plan orizontală** se fac următoarele precizări (**Fig.5.4**) :

$g_x = 0$ deoarece liniile de curent sunt orizontale;

$v_y = v_z = 0$ deoarece liniile de curent sunt paralele cu axa (Ox);

$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$ deoarece mișcarea este permanentă ;

$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0$ deoarece mișcarea este plan-orizontală

Ecuația cugerii permanente, plan-orizontale din fisură (**Fig.5.4**), după aplicarea precizărilor menționate devine:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

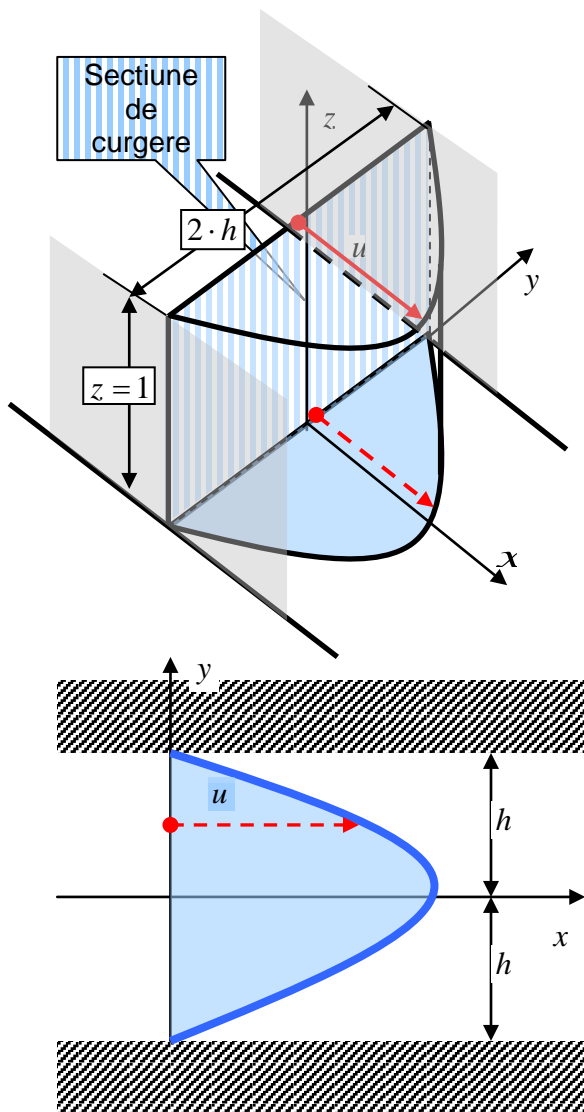


Fig.5.4. Mișcarea unui lichid vâscos între doi pereți plani.

ecuația devine:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{J \cdot \gamma}{\mu}$$

iar prin integrare:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\gamma \cdot J}{\mu} \cdot y + C_1 \quad \text{și} \quad v_x = -\frac{\gamma \cdot J}{2 \cdot \mu} \cdot y^2 + C_1 \cdot y + C_2$$

Pentru o pierdere de sarcină constantă de-a lungul fisurii (**Fig.5.5**):

$$\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = -J = \frac{\Delta H}{\Delta x} \text{ const.}$$

(negativă, pentru că energia potențială scade în sensul curgerii datorită consumului de energie necesar deplasării)

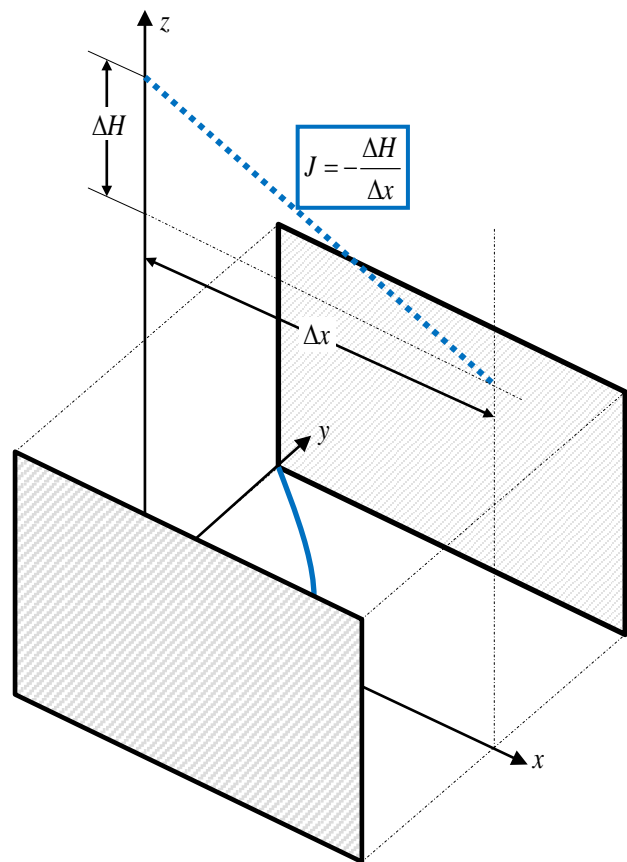


Fig.5.5. Pierderea de sarcină a curgerii permanente din fisură

Condițiile la limită, pentru determinarea constantelor sunt:

$$\begin{cases} v_x = 0; y = +h \\ v_x = 0; y = -h \end{cases} \Rightarrow \text{și} \begin{cases} 0 = -\frac{\gamma \cdot J}{2 \cdot \mu} \cdot h^2 + C_1 \cdot h + C_2 \\ 0 = -\frac{\gamma \cdot J}{2 \cdot \mu} \cdot h^2 - C_1 \cdot h + C_2 \end{cases} \Rightarrow$$

iar constantele obținute sunt

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{\gamma \cdot J}{2 \cdot \mu} \cdot h^2 \end{cases} \Rightarrow,$$

ecuația de mișcare devenind:

$$v_x = \frac{\gamma \cdot J}{2 \cdot \mu} \cdot (h^2 - y^2)$$

cu caracteristicile:

Viteza maximă:

$$v_{xMAX} = \frac{\gamma \cdot J \cdot h^2}{2 \cdot \mu} = \frac{g \cdot J \cdot h^2}{2 \cdot \nu} \text{ pentru } y = 0$$

Debitul unitar:

$$q = 2 \cdot \int_0^h v_x \cdot dy = \frac{\gamma \cdot J}{\mu} \left(\int_0^h h^2 dy - \int_0^h y^2 dy \right) = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \frac{J}{\nu} \cdot h^3$$

Viteza medie:

$$v_{xMED} = \frac{q}{2 \cdot h} = \frac{g \cdot J \cdot h^2}{3 \cdot \nu} = \frac{2}{3} \cdot v_{xMAX}$$

5.2.1.2. Modelul de calcul pentru mișcarea permanentă în conductă rectilinie

Ecuția generală a mișcării permanente de-a lungul axei (Ox) este

$$(Ox): g_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

ecuație în care se particularizează componentele pentru mișcarea permanentă într-o conductă rectilinie, cu secțiune circulară constantă, înclinată cu un unghi α (Fig.5.6):

- proiecția accelerației gravitaționale pe axa Ox : $g_x = g \cdot \sin \alpha$
- mișcarea paralela axa Ox : $v_y = v_z = 0$; $v_x \neq 0$
- secțiunea de curgere circulară și normală la Ox : $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \neq 0$; $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0$
- mișcare permanentă: $\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$

și se obține:

$$g \cdot \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - 0$$

Ținând seama că:

$$\sin \alpha = \frac{J \cdot dx + \frac{dp}{\gamma}}{dx} \Rightarrow J = \sin \alpha - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \gamma \cdot (\sin \alpha - J)$$

în care J este pierderea de sarcină (panta piezometrică), ecuația devine:

$$\rho \cdot g \cdot \sin \alpha - \gamma \cdot (\sin \alpha - J) + 2 \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\gamma \cdot J \Leftrightarrow 2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{g}{\nu} \cdot J$$

Prin integrare se obține succesiv:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{g \cdot J}{2 \cdot \nu} \cdot y + C_1 \Rightarrow v_x = -\frac{g \cdot J}{4 \cdot \nu} \cdot y^2 + C_1 \cdot y + C_2$$

În care condițiile la limite, pentru determinarea constantelor sunt:

$$a) y = 0, \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$b) y = r, v_x = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{g \cdot J}{4 \cdot \nu} \cdot r^2$$

ecuația vitezelor mișcării în conducta rectilinie devenind un paraboloid de rotație:

$$v_x = \frac{g \cdot J}{4 \cdot \nu} \cdot (r^2 - y^2)$$

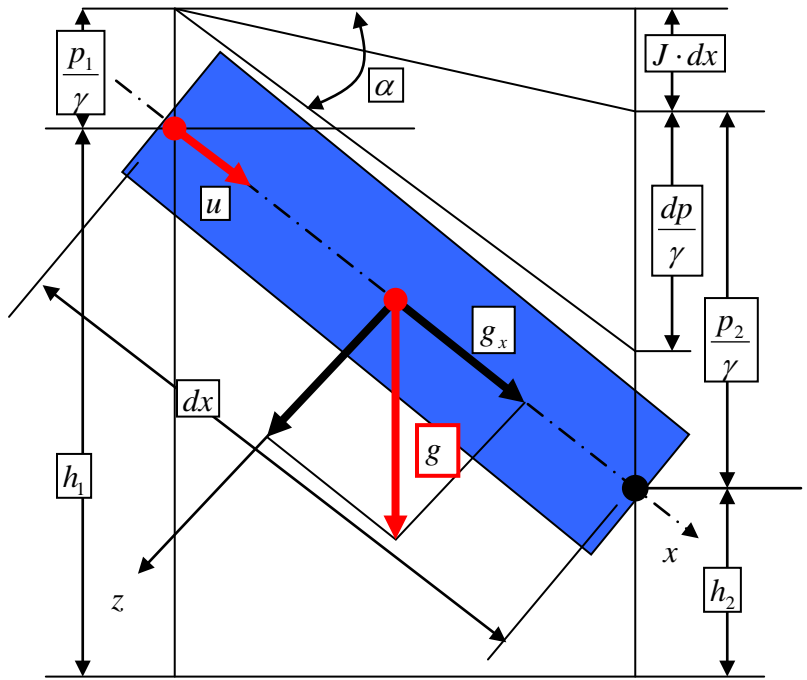


Fig.5.5. Mișcarea permanentă într-o conductă rectilinie cu secțiune constantă

cu caracteristicile:

Viteza maximă

$$v_{xMAX} = \frac{g \cdot J}{4 \cdot \nu} \cdot r^2 \text{ pentru } y = 0$$

Debitul:

$$Q = \int_0^r 2 \cdot \pi \cdot y \cdot v_x \cdot dy = 2 \cdot \pi \int_0^r y \cdot v_x \cdot dy = \frac{\pi \cdot g \cdot J}{2 \cdot \nu} \int_0^r y \cdot (r^2 - y^2) \cdot dy = \frac{\pi \cdot g \cdot J \cdot r^4}{8 \cdot \nu}$$

Viteza medie:

$$v_{xMED} = \frac{Q}{\pi \cdot r^2} = \frac{g \cdot J \cdot r^2}{8 \cdot \nu}$$

Pierderea de sarcină:

$$J = \frac{8 \cdot \nu \cdot v_{xMED}}{g \cdot r^2} = \frac{8 \cdot \nu \cdot Q}{\pi \cdot g \cdot r^4}$$

5.2.1.3. Succesiunea prelucrărilor

Modelele de calcul pentru curgerea unui fluid real în

- **fisură**
$$v_x = \frac{\gamma \cdot J}{2 \cdot \mu} \cdot (h^2 - y^2)$$

și

- **conductă**
$$v_x = \frac{g \cdot J}{4 \cdot \nu} \cdot (r^2 - y^2)$$

prelucrate simultan, permit analiza efectului **forme** **secțiunii** de curgere asupra distribuției **vitezelor** (v_x) și **debitului total** (Q).

Etapele de prelucrare sunt:

1. Introducerea datelor și uniformizarea lor dimensional (în S.I.: careul "GALBEN" din fisierul xls anexat)
2. Calculul vitezelor paralele cu axa OX pentru diverse distanțe de la axa de simetrie (y [m]) :
 - a. Fisură: v_{x_F} [m/s]
 - b. Conductă: v_{x_C} [m/s]
3. Reprezentarea grafică pentru:
 - a. Limitele domeniului de curgere:
 - i. Perete fisură sus
 - ii. Perete fisura jos
 - b. Variația vitezelor v_{x_F} [m/s] și v_{x_C} [m/s] în funcție de y [m]
4. Calculul debitelor totale pentru:
 - a. Fisură: Q_{FISURA}
 - b. Conductă: $Q_{CONDUCTA}$
$$Q_{FISURA} = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \frac{J}{\nu} \cdot h^3$$
$$Q_{CONDUCTA} = \frac{\pi \cdot g \cdot J \cdot r^4}{8 \cdot \nu}$$
5. Calculul secțiunilor de curgere pentru:
 - a. Fisură: secțiune_F
 - b. Conductă: secțiune_C
6. Calculul vitezelor medii ale apei pentru:
 - a. Fisură: V_{mF}
 - b. Conductă: V_{mC}
7. Reprezentarea grafică a vitezelor medii de curgere a apei în fisură și conductă.

5.2.2.4. Întrebări care ...așteaptă răspuns

1. Ce este curgerea permanentă?
2. Ce formă au secțiunile transversale ale fisurii și conductei?
3. Care este orientarea vectorului vitezei în raport cu secțiunea de curgere în fisură?
4. Care este orientarea vectorului vitezei în raport cu secțiunea de curgere în conductă ?
5. Care este raportul dintre debitul total al fisurii și debitul total al conductei?