

HIDRAULICĂ SUBTERANĂ (note de curs)

Daniel Scrădeanu

5. HIDRODINAMICA.....	2
5.1. DINAMICA FLUIDELOR PERFECTE (ec. Euler).....	2
5.2. DINAMICA FLUIDELOR REALE	5
5.2.1. Ecuațiile mișcării fluidelor vâscoase în regim laminar	8
5.2.1.1. Aplicație: Mișcare permanentă în fisuri	10
5.2.1.2. Aplicație: Mișcare permanentă în conducte	12
5.2.2. Mișcarea permanentă în conducte sub presiune.....	14
5.2.2.1. Extensia ecuației lui Bernoulli la curenți cu secțiuni finite.....	16
5.2.2.2. Pierderea de sarcină longitudinală.....	18
5.2.2.3. Coeficientul de rezistență λ	20
5.2.2.4. Panta hidraulică și debitul conductelor.....	22
5.2.2.5. Pierderile de sarcină hidraulică locale.....	25
5.2.2.6. Șocul hidraulic (lovitura de berbec).....	26
5.2.2.7. Conducte neramificate cu diametru variabil.....	27
5.2.2.8. Conducte legate în paralel	29
5.2.2.9. Conducte ramificate.....	30
5.2.3. Mișcarea uniformă a curenților cu suprafață liberă.....	33
5.2.3.1. Legea fundamentală a curgerii uniforme cu suprafață liberă	34
5.2.3.2. Dimensionarea canalelor.....	35
5.2.3.2.1. Evaluarea secțiunii optime de curgere	35
5.3. MODELE DE SEDIMENTARE ÎN REGIM HIDRODINAMIC (MS2).....	37
5.3.1. Deplasarea particulei prin alunecare în contact cu substratul solid (MS2.1).....	37
5.3.1.1. Viteza de antrenare prin alunecare pe substrat solid	37
5.3.1.2. Capacitatea de transport pe substrat solid	40
Aplicație MS2.1.	42
5.3.2. Deplasarea particulei în suspensie (MS2.2).....	46
5.3.2.1. Viteza de deplasare în suspensie	47
5.3.2.2. Capacitatea de transport în suspensie.....	49
Aplicație MS2.2.	50
BIBLIOGRAFIE	51

5. HIDRODINAMICA

Hidrodinamica are ca obiect studiul curgerii fluidelor **perfecte** și **reale**, studiu **cantitativ** realizat prin **modele matematice** (ecuații) utilizate pentru evaluarea **cantitativă** a mișcării acestora în diverse condiții:

- **naturale** (rețea hidrografică, acvifere fisurale, acvifere granulare etc.)
- **antropice** (conduțe, rezervoare, canale etc.).

Evaluarea cantitativă presupune determinarea **parametrilor descriptori** ai curgerii.

5.1. DINAMICA FLUIDELOR PERFECTE (ec. Euler)

Studiul mișcării fluidelor este simplificat prin introducerea noțiunii de **fluid perfect**, adică fluid **greu** ($\rho \cdot g > 0$) fără **vâscozitate** ($\mu = 0$).

Ecuațiile dinamicii fluidelor perfecte se deduc pe baza echilibrului dinamic dintre **forțele** care acționează asupra particulei de fluid în mișcare și care sunt reprezentate prin:

- **forțele masice**
- **forțele de presiune**
- **forțele de inerție** generate de accelerația particulelor de fluid

Dinamica fluidelor perfecte presupune ca și la fluidele în repaus, numai eforturi unitare normale de **compresiune**, egale în toate direcțiile, fiind exprimate cantitativ prin mărimea scalară numită **presiune hidrodinamică**.

Considerăm o **particulă elementară** de fluid în mișcare, de formă prismatică, pentru care ecuațiile de mișcare se vor scrie prin proiecții pe cele trei axe ale sistemului de referință cartezian (**Fig.5.1**).

Acțiunea fluidului asupra particulei elementare de fluid se înlocuiește prin forțele de legătură, reprezentate prin **forțele de presiune** pe fiecare față, distribuite **uniform**, ipoteză acceptabilă datorită suprafețelor mici ale particulei.

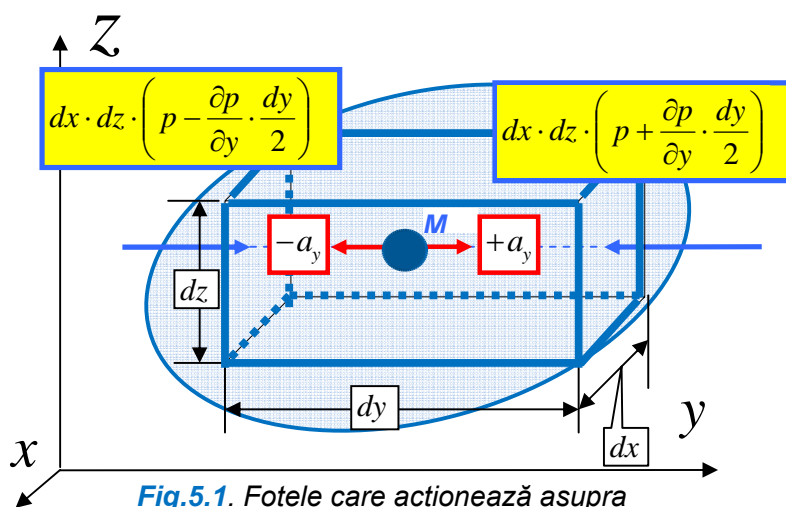


Fig.5.1. Forțele care acționează asupra particulei M

Definim **presiunea** și **viteza locală** în centrul particulei (M) prin relațiile:

$$p = p(x, y, z, t) \text{ și } \vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

Conform **principiului al doilea al mecanicii**, mișcarea particulei elementare de fluid se produce sub acțiunea **forțelor exterioare** care sunt egale cu derivata **impulsului** în raport cu timpul (sau produsul dintre **masa** și **accelerație**):

$$\vec{a} \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \vec{F}_e$$

care proiectată pe axa Oy devine:

$$a_y \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = F_{ey}$$

în care

a_y - accelerația particulei elementare de fluid, paralelă cu axa Oy ;

dx, dy, dz - dimensiunile particulei elementare de fluid;

F_{ey} - **forțele exterioare** proiectate pe axa Oy , forțe care sunt reprezentate prin:

- **Forțele masice** care acționează asupra particulei (f_y -forța masică unitară):

$$\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot f_y = F_{ey1}$$

- **Forțele de legătură** (forțele de presiune hidrodinamică)

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) \cdot dx \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) \cdot dx \cdot dz = F_{ey2}$$

Relația de echilibru a forțelor care acționează asupra particulei elementare de fluid în mișcare, pe direcția axei Oy este:

$$F_{ey1} + F_{ey2} = F_{ey}$$

$$\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot f_y + \left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) \cdot dx \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) \cdot dx \cdot dz = a_y \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

care după efectuarea reducerilor devine:

$$(Oy): f_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = a_y$$

Procedând similar și pentru celelalte axe ale sistemului cartezian de referință și introducând **derivata substanțială a vitezei locale** se obțin ecuațiile lui Euler pentru un fluid ideal:

$$\begin{aligned} (Ox): f_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = a_x &= \frac{Dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ (Oy): f_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = a_y &= \frac{Dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ (Oz): f_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = a_z &= \frac{Dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Pentru a ajunge la **forma vectorială** a ecuațiilor lui Euler se procedează succesiv:

- înmulțim ecuațiile cu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ pentru axele Ox, Oy, Oz
- adunăm ecuațiile pe cele trei axe termen cu termen;
- pentru forțele masice (\vec{F}) se ia în considerare **potențialul gravitațional**:

$$-U = g \cdot z + const.$$

$$\vec{i} \cdot f_x + \vec{j} \cdot f_y + \vec{k} \cdot f_z - \frac{1}{\rho} \cdot \left(\vec{i} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{D}{Dt} (\vec{i} \cdot v_x + \vec{j} \cdot v_y + v_z \cdot \vec{k})$$

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} grad(p) = \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

$$-g \cdot grad(z) - \frac{1}{\rho} \cdot grad(p) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v}$$

Ținând seama că $grad\left(\frac{v^2}{2}\right) = \vec{v} \times rot(\vec{v}) + (\vec{v} \nabla) \vec{v}$ ecuația lui Euler devine :

$$-g \cdot grad(z) - \frac{1}{\rho} \cdot grad(p) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + grad\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times rot(\vec{v})$$

în care pentru **mișcare irotațională și nepermanentă a unui fluid incompresibil**: $rot(\vec{v}) = 0$ și $\rho = const.$ și ecuația anterioară devine:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = grad\left(g \cdot z + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right)$$

Pentru **mișcare staționară** ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$) a unui fluid greu, cu **vâscozitate zero** ($\mu = 0$) și **incompresibil** (http://www.ahgr.ro/media/153271/1.2_deformabilitatea.pdf) ecuația lui Euler, prin integrare, conduce la **ecuația fundamentală a lui Bernoulli**, ecuație stabilită pentru prima dată de Daniel Bernoulli în 1738, pe o cale directă, înainte ca Euler să fi stabilit ecuațiile generale ale mișcării particulei fluide (vezi 4.3.2. Conservarea energiei din capitolul 4.3 principiile fundamentale ale mișcării fluidelor; http://www.ahgr.ro/media/156391/4.3_principii-fundamentale-ale-miscarii-fluidelor.pdf):

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2 \cdot g} = const.$$

5.2. DINAMICA FLUIDELOR REALE

Starea de tensiune în cazul fluidelor **vâscoase** în mișcare este dată de:

- **eforturi tangențiale** determinate de:
 - **vâscozitate** (http://www.ahgr.ro/media/153298/1.4_vascozitate.pdf)
 - **turbulență** (http://www.ahgr.ro/media/153361/1.4.2_reynolds.pdf)
- **eforturi normale** datorate **presiunilor normale** (http://www.ahgr.ro/media/154976/2.2_fortele-care-actioneaza-intr-un-lichid.pdf)

și este reprezentată printr-un **tensor de forma**:

$$P = \begin{Bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{Bmatrix}$$

în care se consideră **pozitive** componentele definite pe o față pozitivă (normală pe direcțiile \vec{i} , \vec{j} sau \vec{k}) și îndreptate în sensul pozitiv al axelor.

Tensorul eforturilor unitare se caracterizează prin:

- **eforturile tangențiale** simetrice față de diagonala principală sunt egale ($p_{ij} = p_{ji}$)
- **suma eforturilor normale** (componentele plasate pe diagonala principală) este invariantă la orientarea sistemului de axe, exprimă gradul de **comprimare** al fluidelor pe care starea de tensiune îl dezvoltă în punctul M și poate fi exprimat prin **presiunea hidrodinamică**:

$$p(M) = -\frac{1}{3} \cdot (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})$$

care pentru o stare de tensiune izotropă are tensorul:

$$P_0 = \begin{Bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Bmatrix}$$

Starea de tensiune generată de prezența eforturilor tangențiale (P') se obține prin scăderea din tensorul stării generale de tensiune (P) a tensorului presiunii hidrodinamice (P_0):

$$P' = P - P_0 = \begin{Bmatrix} p'_{xx} + p & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p'_{yy} + p & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p'_{zz} + p \end{Bmatrix}$$

Eforturile normale ale stării de tensiune P' rezultă din relațiile:

$$p'_{xx} = p_{xx} + p$$

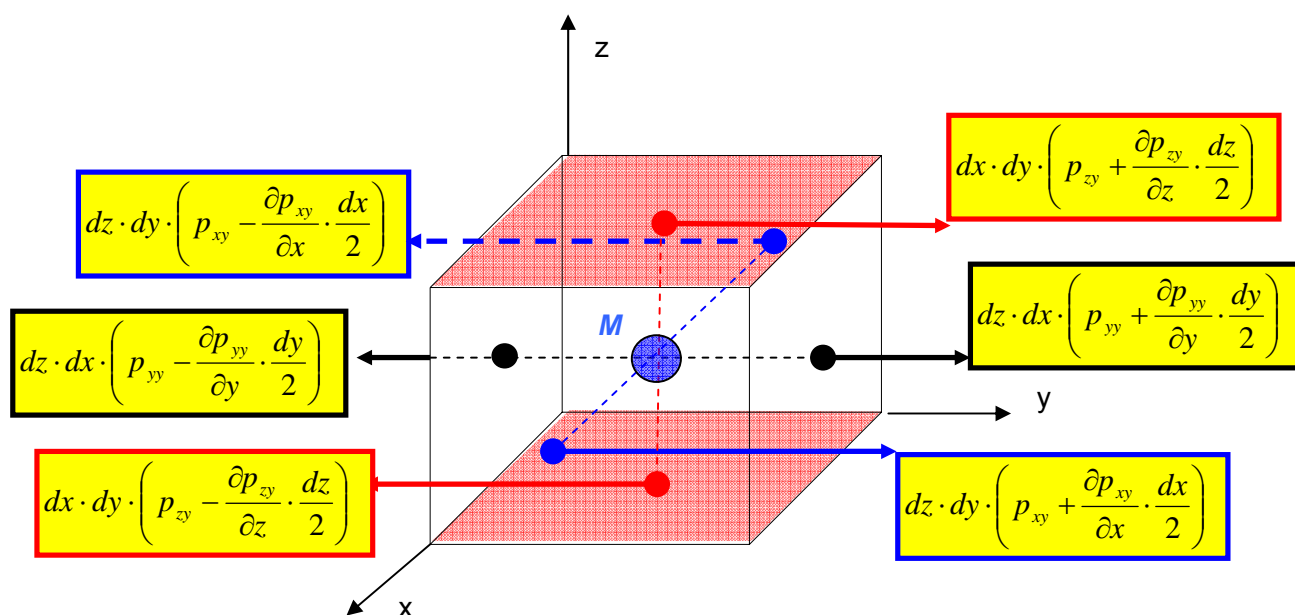


Fig.5.2. Forțele de legătură (F_{ey2}) care acționează asupra unei particule de fluid real în mișcare

Considerăm o particulă elementară prismatică de fluid real aflată în mișcare cu centrul în M pentru care definim (**Fig.5.2.**):

- viteza: $\vec{v} = \vec{v}(M, t)$
- eforturile unitare: $\vec{p}_n = \vec{p}_n(M, \vec{n}, t)$

Conform **principiului al doilea al mecanicii**, mișcarea particulei elementare de fluid se produce sub acțiunea **forțelor exterioare** care sunt egale cu derivata **impulsului** (http://www.ahgr.ro/specialisti/daniel-scradeanu/2_hidraulica/30_suport-pentru-aplicatii/33_impusul.aspx) în raport cu timpul (sau produsul dintre masa și accelerație):

$$\vec{a} \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \vec{F}_e$$

care proiectată pe axa Oy devine:

$$a_y \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = F_{ey}$$

în care

a_y - accelerația particulei elementare de fluid, paralelă cu axa Oy ;

dx, dy, dz - dimensiunile particulei elementare de fluid;

F_{ey} - **forțele exterioare** proiectate pe axa Oy , forțe care sunt reprezentate prin :

- **Forțele masice** care acționează asupra particulei (f_y -forța masică unitară):

$$F_{ey1} = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot f_y$$

- **Forțele de legătură** (forțele de presiune hidrodinamică notate după următoarele reguli:
 - **primul indice** este cel al axei perpendiculare pe planul în care se află proiectată forța de presiune
 - **al doilea indice** este cel al axei cu care este paralelă forța de presiune)

$$\begin{aligned} F_{ey2} &= \left(-p_{yy} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} + p_{yy} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) \cdot dx \cdot dz + \\ &+ \left(-p_{zy} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} + p_{zy} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \right) \cdot dx \cdot dy + \\ &+ \left(-p_{xy} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} + p_{xy} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot dy \cdot dz = \\ &= \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \end{aligned}$$

Relația de echilibru a forțelor care acționează asupra particulei elementare de fluid real (cu vâscozitate) în mișcare, **pe direcția axei** Oy este:

$$\left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot f_y = a_y \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

care după simplificare și împărțite prin ρ devine:

$$(Oy): f_y + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) = a_y = \frac{Dv}{Dt}$$

Procedând similar și pentru celelalte axe ale sistemului cartezian de referință și introducând **derivata substanțială a vitezei locale** se obțin ecuațiile generale ale **mișcării fluidelor reale** în funcție de eforturile unitare.

$$\begin{aligned} (Ox): f_x + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right) &= a_x = \frac{Dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ (Oy): f_y + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) &= a_y = \frac{Dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ (Oz): f_z + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) &= a_z = \frac{Dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Din sistemul de ecuații diferențiale proiectate pe cele trei axe ale sistemului de referință se deduc ecuații pentru: mișcarea fluidelor vâscoase **în regim laminar** și în **regim turbulent**.

5.2.1. Ecuațiile mișcării fluidelor vâscoase în regim laminar

Ecuațiile mișcării fluidelor vâscoase în regim laminar (ec. Navier-Stokes) se deduc prin aplicarea **legii a doua a lui Newton** la mișcarea **fluidelor newtoniene** admițându-se ipoteza că **tensiunea** fluidului este proporțională cu **gradientul vitezei** și al **presiunii**.

Se înlocuiesc, în ecuațiile generale ale mișcării fluidelor reale, eforturile unitare de **vâscozitate** prin **vitezele locale de deformare** ale particulei de fluid utilizând relația lui Newton:

$$\tau = \mu \cdot \frac{dv}{dn}$$

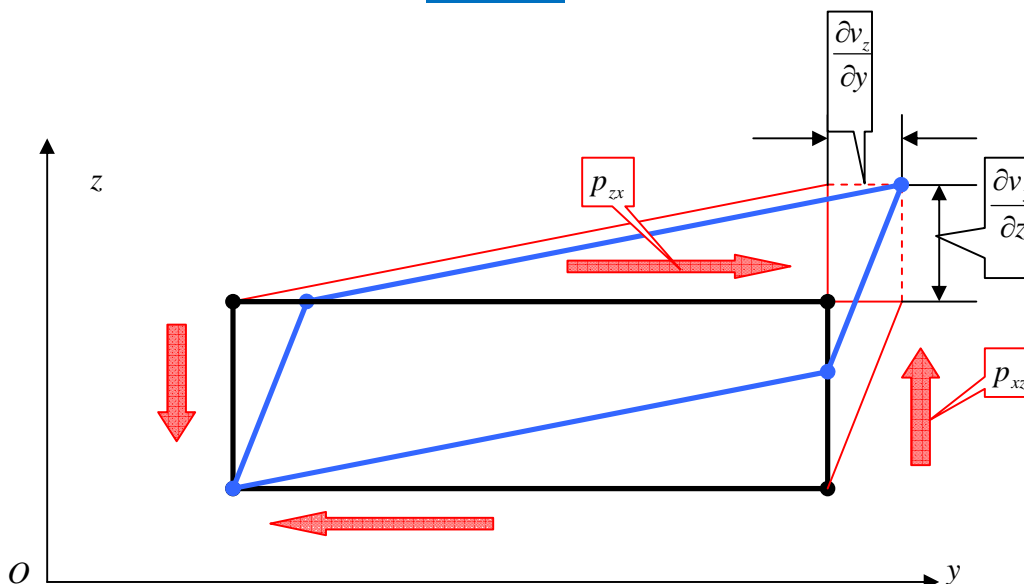


Fig.5.3. Deformarea particulei sub acțiunea eforturilor tangențiale datorate vâscozității în planul yOz

Relațiile dintre deformații și eforturi la fluide sunt analoge cu cele de la solide, deformațiile fiind proporționale cu variațiile vitezelor locale, raportate la axele pe care sunt proiectate (**Fig.5.3**

pentru planul yOz: $s_{yz} + s_{zy} = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}$). **Tensorul eforturilor unitare** devine:

$$P = \begin{pmatrix} 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ecuțiile generale ale mișcării fluidelor reale, în funcție de deformările introduse sub acțiunea vâscozității devin:

$$(Oy): f_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + 2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right] = \frac{Dv}{Dt}$$

și mai departe:

$$(Oy): f_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{Dv}{Dt} = a_y$$

în care $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div} \vec{V} = 0$ datorită **continuității** în fluidele incompresibile, ajungându-se în final la forma:

$$(Oy): f_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

în care:

- forțele masice: f_y
- gradientul presiunii (componentă a divergenței tensiunii): $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}$
- efectul vâscozității (componentă a divergenței tensiunii): $\frac{\mu}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right)$
- accelerația nestaționară (componentă a inerției): $\frac{\partial v_y}{\partial t}$
- accelerația convectivă (schimbarea de direcție): $v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z}$

Grupând ecuațiile pentru cele trei axe se obțin ecuațiile lui Navier-Stokes pentru fluidele grele, vâscoase și incompresibile:

$$(Ox): f_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$(Oy): f_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$(Oz): f_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

5.2.1.1. Aplicație: Mișcare permanentă în fisuri

Ecuția generală a mișcării permanente de-a lungul axei (Ox) în câmp gravitațional este (Fig.5.4.):

$$(Ox): g_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

în care:

$g_x = 0$ deoarece liniile de curent sunt orizontale;
 $v_y = v_z = 0$ deoarece liniile de curent sunt paralele cu axa (Ox);

$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$ deoarece mișcarea este permanentă ;

$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0$ deoarece mișcarea este plană

reducându-se la :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

Pentru o pierdere de sarcină constantă (Fig.5.4.b):

$$\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = -J = const.$$

ecuația devine:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{J \cdot \gamma}{\mu},$$

iar prin integrare:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\gamma \cdot J}{\mu} \cdot y + C_1$$

și în continuare

$$v_x = -\frac{\gamma \cdot J}{2 \cdot \mu} \cdot y^2 + C_1 \cdot y + C_2$$

Condițiile la limită, pentru determinarea constantelor sunt:

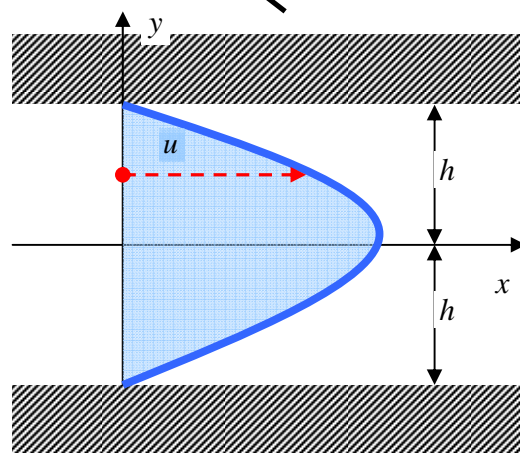
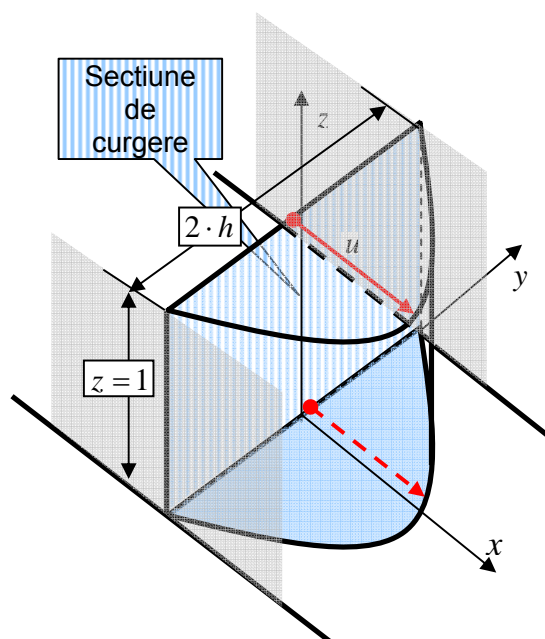


Fig.5.4. Mișcarea paralelă a unui lichid vâscos între doi pereți plani.

$$\begin{cases} v_x = 0; y = +h \\ v_x = 0; y = -h \end{cases} \Rightarrow \text{și} \begin{cases} 0 = -\frac{\gamma \cdot J}{2 \cdot \mu} \cdot h^2 + C_1 \cdot h + C_2 \\ 0 = -\frac{\gamma \cdot J}{2 \cdot \mu} \cdot h^2 - C_1 \cdot h + C_2 \end{cases} \Rightarrow$$

iar constantele obținute sunt

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{\gamma \cdot J}{2 \cdot \mu} \cdot h^2 \Rightarrow, \end{cases}$$

ecuația de mișcare devenind:

$$v_x = \frac{\gamma \cdot J}{2 \cdot \mu} \cdot (h^2 - y^2)$$

cu caracteristicile:

Viteza maximă:

$$v_{xMAX} = \frac{\gamma \cdot J \cdot h^2}{2 \cdot \mu} = \frac{g \cdot J \cdot h^2}{2 \cdot \nu} \text{ pentru } y = 0$$

Debitul unitar:

$$q = 2 \cdot \int_0^h v_x \cdot dy = \frac{\gamma \cdot J}{\mu} \left(\int_0^h h^2 dy - \int_0^h y^2 dy \right) = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \frac{J}{\nu}$$

Viteza medie:

$$v_{xMED} = \frac{q}{2 \cdot h} = \frac{g \cdot J \cdot h^2}{3 \cdot \nu} = \frac{2}{3} \cdot v_{xMAX}$$

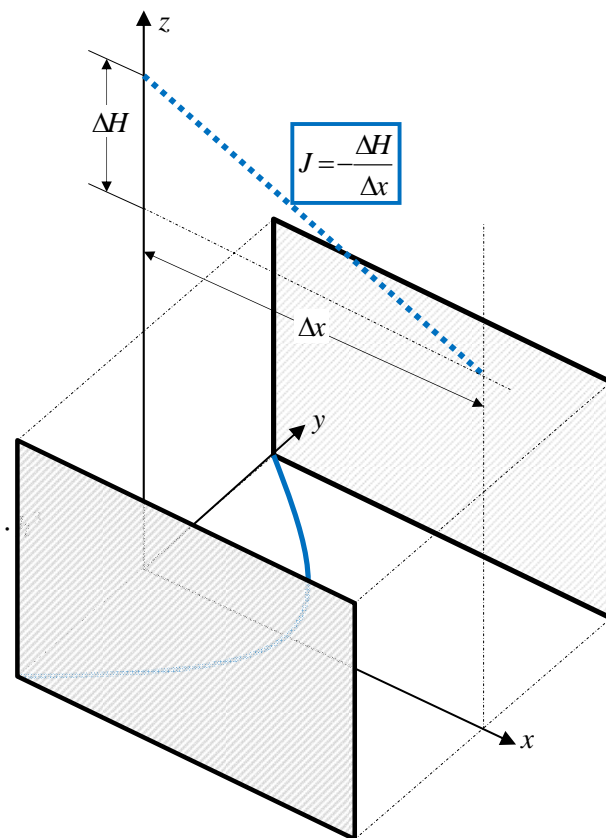


Fig.5.4.b. Pierdere de sarcina a curgerii permanente din fisură

5.2.1.2. Aplicație: Mișcare permanentă în conducte

Ecuția generală a mișcării permanente de-a lungul axei (Ox) în câmp gravitațional este

$$(Ox): g_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

ecuație în care se particularizează componentele pentru mișcarea permanentă într-o conductă rectilinie, cu secțiune circulară constantă, înclinată cu un unghi α (Fig.5.5):

- proiectia accelerației gravitaționale pe axa Ox : $g_x = g \cdot \sin \alpha$
- mișcarea paralela axa Ox : $v_y = v_z = 0$; $v_x \neq 0$
- secțiunea de curgere circulară și normală la Ox : $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \neq 0$; $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0$
- mișcare permanentă: $\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$

și se obține:

$$g \cdot \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - 0$$

Ținând seama că:

$$\sin \alpha = \frac{J \cdot dx + \frac{dp}{\gamma}}{dx} \Rightarrow J = \sin \alpha - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \gamma \cdot (\sin \alpha - J)$$

în care J este pierderea de sarcină (panta piezometrică), ecuația devine:

$$\rho \cdot g \cdot \sin \alpha - \gamma \cdot (\sin \alpha - J) + 2 \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\gamma \cdot J \Leftrightarrow 2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{g}{\nu} \cdot J$$

Prin integrare se obține succesiv:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{g \cdot J}{2 \cdot \nu} \cdot y + C_1 \Rightarrow v_x = -\frac{g \cdot J}{4 \cdot \nu} \cdot y^2 + C_1 \cdot y + C_2$$

În care condițiile la limite, pentru determinarea constantelor sunt:

a) $y = 0, \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

b) $y = r, v_x = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{g \cdot J}{4 \cdot \nu} \cdot r^2$

ecuația vitezelor mișcării în conducta rectilinie devenind un paraboloid de rotație:

$$v_x = \frac{g \cdot J}{4 \cdot \nu} \cdot (r^2 - y^2)$$

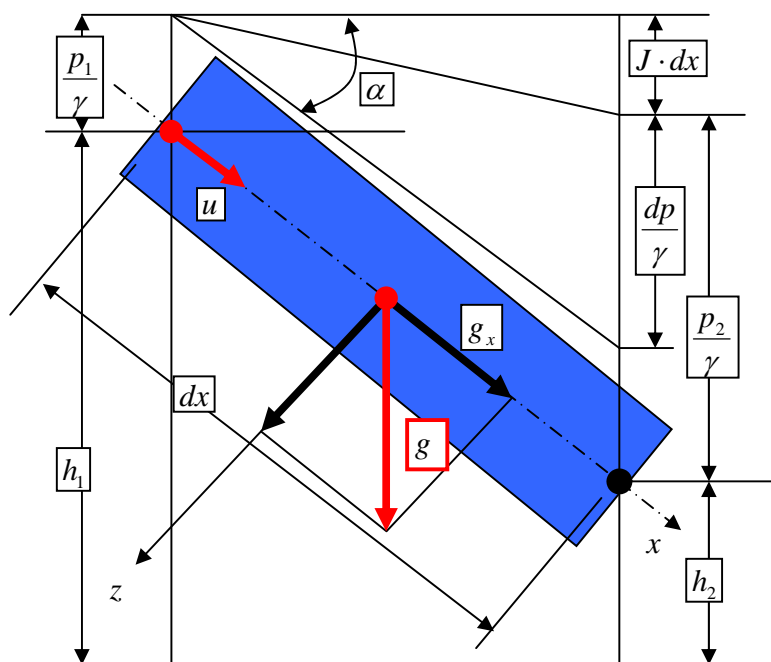


Fig.5.5. Mișcarea permanentă într-o conductă rectilinie cu secțiune constantă

cu caracteristicile:

Viteza maximă: $v_{xMAX} = \frac{g \cdot J}{4 \cdot \nu} \cdot r^2$ pentru $y = 0$

Debitul: $Q = \int_0^r 2 \cdot \pi \cdot y \cdot v_x \cdot dy = 2 \cdot \pi \int_0^r y \cdot v_x \cdot dy = \frac{\pi \cdot g \cdot J}{2 \cdot \nu} \int_0^r y \cdot (r^2 - y^2) \cdot dy = \frac{\pi \cdot g \cdot J \cdot r^4}{8 \cdot \nu}$

Viteza medie: $v_{xMED} = \frac{Q}{\pi \cdot r^2} = \frac{g \cdot J \cdot r^2}{8 \cdot \nu}$

Pierderea de sarcină: $J = \frac{8 \cdot \nu \cdot v_{xMED}}{g \cdot r^2} = \frac{8 \cdot \nu \cdot Q}{\pi \cdot g \cdot r^4}$

5.2.2. Mișcarea permanentă în conducte sub presiune

Calculul conductelor sub presiune este necesar pentru conductele care servesc la transportul unui lichid în mișcare permanentă. Se admit următoarele ipoteze simplificatoare pentru această mișcare:

- temperatura este constantă;
- densitatea este constantă
- vâscozitatea este constantă
- gazele în soluție și particulele solide în suspensie sunt în cantități neglijabile.

Problema esențială a evaluării mișcării permanente în conducte sub presiune este determinarea **pierderilor de sarcină hidrodinamică** a căror cunoaștere permite evaluarea **presiunilor** în orice punct al traseului utilizând **ecuația lui Bernoulli** și cunoscând **debitele** transportate.

Pierderile de sarcină hidraulică se clasifică în două categorii:

- **pierderi de sarcină hidrodinamică distribuite uniform**, de-a lungul unei conducte rectilinii, cu secțiune constantă și de construcție uniformă;
- **pierderi de sarcină hidrodinamică locale**, provocate de variațiile de secțiune și care se concentrează pe distanțe scurte
-

Schema geometrică a distribuției pierderilor de sarcină hidrodinamică conține următoarele elemente (**Fig.5.6.**):

- Linia energiilor sau **planul de sarcină**, orizontal, la partea superioară, care reprezintă suma energiilor și pierderilor pe orice verticală;
- Linia pierderilor de sarcină longitudinale cumulate;
- Linia pierderilor de sarcină totale (longitudinale și locale), numită și linie energetică
- Linia presiunilor sau piezometrică
- Axa conductei proiectată în plan vertical
- Linia planului orizontal de referință
- Proiecția axei conductei în plan orizontal

Calculul pierderilor de sarcină se face considerând mișcarea pe **firul axial al conductei**, cu viteze egale cu **viteza medie** în secțiunile respective.

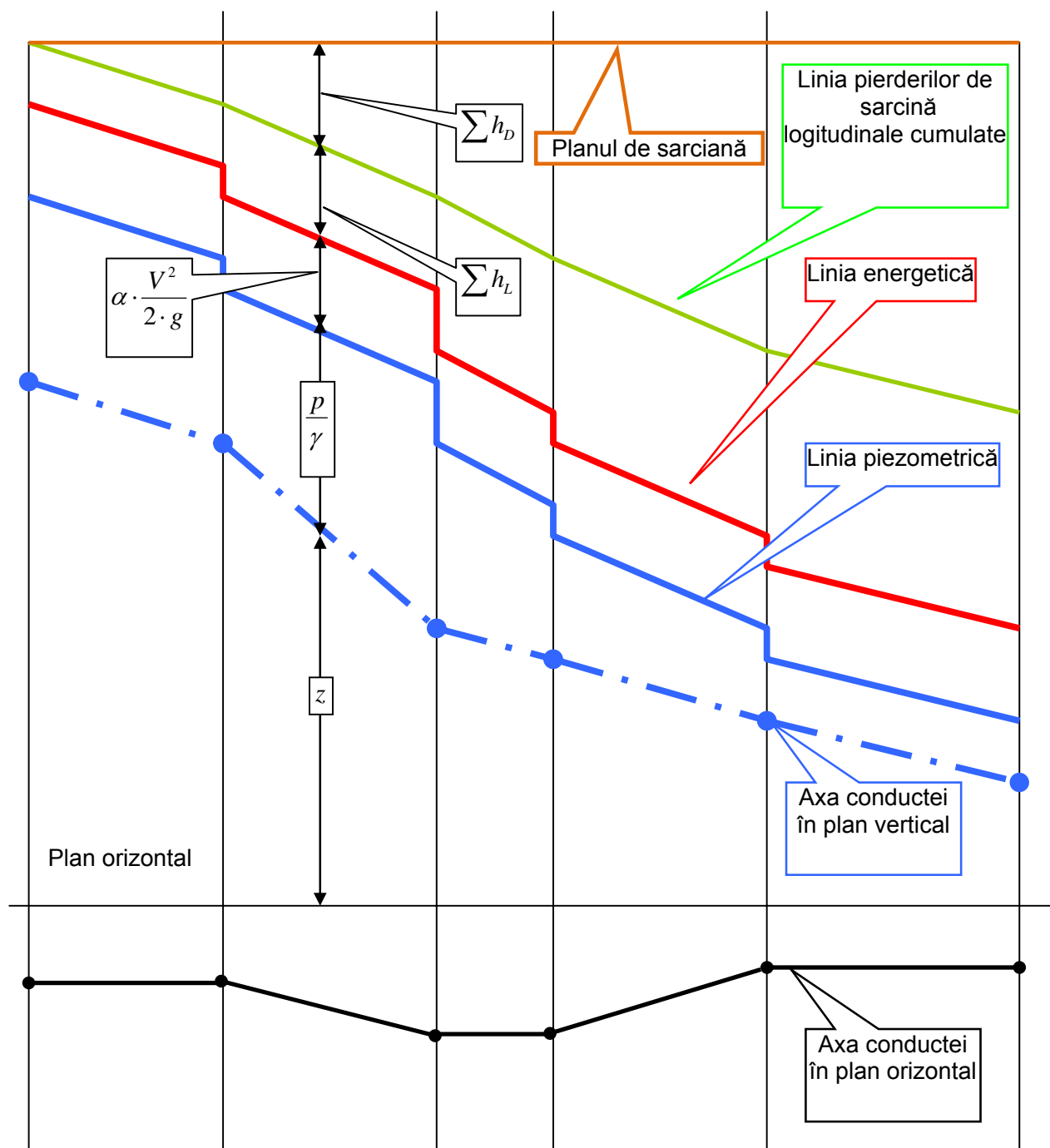


Fig.5.6. Schematizarea geometrică a pierderilor de sarcină pentru o conductă sub presiune (dupa C.Mateescu, 1963)

5.2.2.1. Extensia ecuației lui Bernoulli la curenți cu secțiuni finite

Ecuția lui Bernoulli în forma

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

este elaborată pentru un **fir de curent** și pentru a fi utilizată în calculul conductelor sub presiune trebuie extinsă la **secțiunea finită** a acestora.

Distribuția vitezelor și a presiunilor în mișcare permanentă variază neliniar în aceeași secțiune transversală cât și de la o secțiune la alta, chiar și la lichidele perfecte, datorită curburii liniilor de curent și a forțelor centrifuge generate.

Pentru un curent cu **secțiune finită** (Ω) format din tuburi subțiri de curent, paralele și rectilinii cu **curbură redusă**, termenul $\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$ este constant în orice punct al secțiunii finite iar **viteza medie** în această secțiune este:

$$V = \frac{\int_{\Omega} v \cdot d\Omega}{\Omega}$$

în care v este viteza locală pe un fir de curent.

Energia specifică totală pentru un fir de curent mediu se calculează cu media (H^*):

$$H^* = \frac{\int_{\Omega} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2 \cdot g}\right) \cdot dQ}{Q}$$

și poate fi pusă sub forma sumei celor **trei** forme de energie (de poziție, de presiune și cinetică) cu ajutorul unui **coeficient** α introdus și calculat de **Coriolis** pentru diferite tipuri de mișcări, de forma:

$$\int_{\Omega} \frac{v^2}{2} \cdot \rho \cdot dQ = \alpha \cdot \frac{V^2}{2} \cdot \rho \cdot Q$$

formă care permite exprimarea sumei energiilor cinetice ale debitelor de masă elementară în funcție de energia cinetică a întregii mase de fluid care traversează secțiunea Ω . Dacă α este cunoscut și $\rho = \text{const.}$ rezultă că :

$$\int_{\Omega} \frac{v^2}{2 \cdot g} \cdot dQ = \alpha \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g} \cdot Q$$

și deoarece $\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$ nu depinde de dQ rezultă că ecuația lui Bernoulli pentru curenți cu secțiuni finite este:

$$H^* = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g} = const.$$

Coefficientul lui Coriolis, determinat pentru diferite tipuri de mișcări are valori cuprinse între **1,05 și 1,1**, valoarea lui **maximă** fiind **2** în cazul unor diagrame foarte neuniforme de distribuție a vitezelor.

Între două secțiuni 1 și 2 ale unui curent de fluid ideal/real cu secțiune finită, utilizând coeficientul lui Coriolis și introducând pierderile de energie datorate rezistențelor dintre cele două secțiuni introduse de vâscozitatea fluidului real sunt valabile ecuațiile (Fig.5.7.):

- $z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$ pentru fluidul ideal

și

- $z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \cdot \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \cdot \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + h_d$ pentru fluidul real

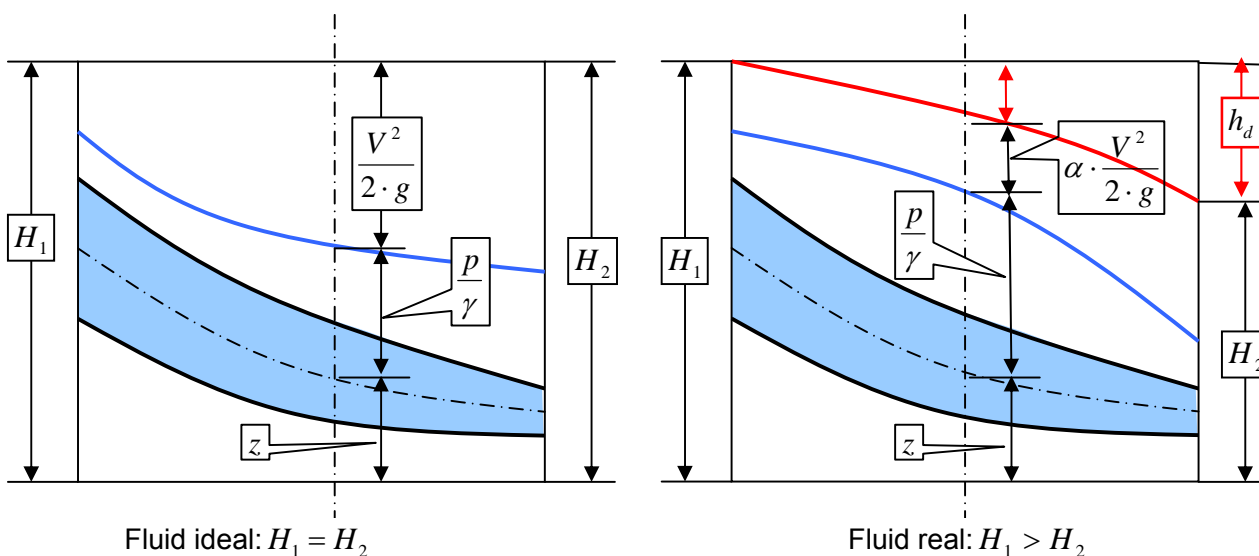


Fig.5.7. Extensia ecuației lui Bernoulli la un curent de fluid real cu secțiune finită

5.2.2.2. Pierderea de sarcină longitudinală

Pierderea de sarcină longitudinală/distribuită (h_D), preponderent de natură cinetică, are aceeași distribuție de-a lungul curentului de fluid atâta timp cât factorii care o condiționează nu se modifică.

Cercetări experimentale realizate pe o instalație sub presiune (**Fig.5.8.**) au identificat principalii factori care determină valoarea pierderilor de sarcină longitudinală/distribuită:

- diametrul conductei (D)
- lungimea conductei (L)
- viteza medie în secțiunea curentului de fluid (V)
- rugozitatea pereților (k)
- vâscozitatea fluidului (ν)
- densitatea fluidului (ρ)

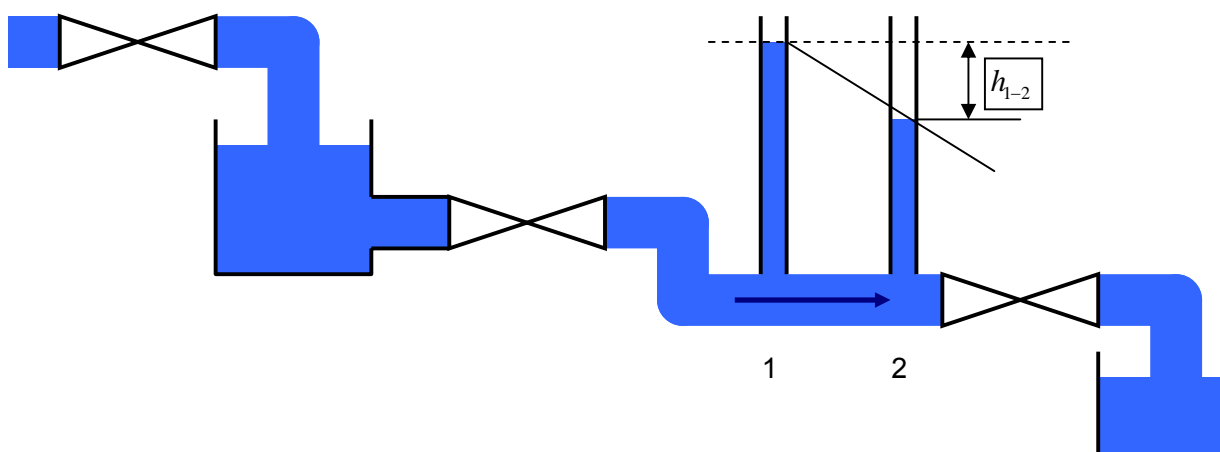


Fig.5.8. Instalație pentru măsurarea pierderilor de sarcină distribuite/longitudinale (E.Trofin, 1974)

Corelația dintre **pierderea de sarcină longitudinală** (h_D) și ceilalți factori s-a stabilit pe baza măsurătorile realizate de Henry Darcy (1805) și are forma:

$$h_D = \lambda \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g \cdot D} \cdot L$$

în care λ este un **coeficient de rezistență** adimensional, stabilit în funcție de:

- numărul Reynolds (Re):

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu}$$

- rugozitate (k)-înălțimea absolută a asperităților

- raza hidraulică (R_h) (**Fig.5.9**):

$$R_h = \frac{\Omega}{P}$$

în care

Ω -secțiunea de curgere;

P -perimetrul udat de fluid;

r_0 -raza conductei

D -diametrul conductei:

$$D = 2 \cdot r_0$$

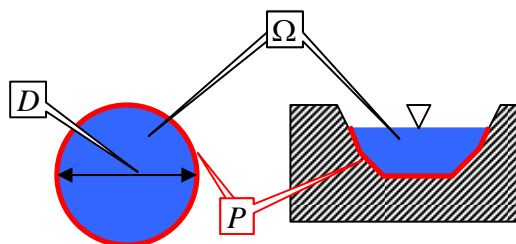


Fig.5.9. Raza hidraulică pentru o conductă cu secțiunea circulară sub presiune și un canal deschis.

Pierdere de sarcină longitudinală/ distribuită este condiționată de coeficientul de rezistență adimensional λ , coeficient determinat experimental în diferite condiții de curgere.

5.2.2.3. Coeficientul de rezistență λ

Valorile **coeficientului de rezistență** (λ), în corelație cu factorii semnalăți s-au stabilit pe baza cercetărilor experimentale sistematice realizate de A. Nikuradze (1932) și A.P. Zegjda (1938).

Rezultatele, obținute pe conducte cu rugozitate artificială, rugozitate realizată cu particule sferice de diametru constant, sunt sintetizate într-o diagramă cu patru zone distincte (**Fig.5.10**):

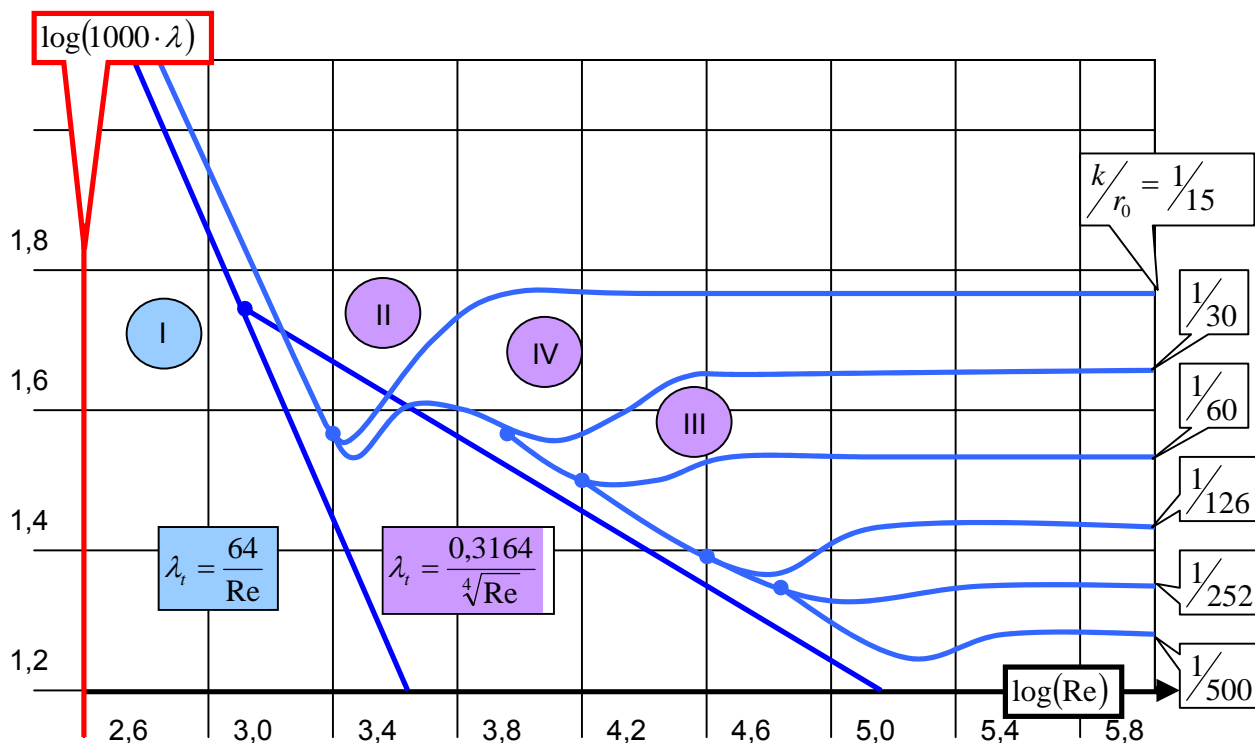


Fig.5.10. Diagrama lui NIKURADZE

- **ZONA I**, corespunde **regimului laminar** de curgere ($Re \leq 2300$) iar λ este independent de rugozitatea pereților conductei și depinde numai de **numărul Reynolds**, iar pentru conducte cilindrice se calculează cu relația:

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

În aceste condiții, pierderea de sarcină distribuită este proporțională cu viteza medie de mișcare a fluidului:

$$h_D = \frac{64}{V \cdot D} \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g \cdot D} \cdot L = \frac{32 \cdot V \cdot \nu}{g \cdot D^2} \cdot L$$

- **ZONA II** corespunde **mișcării turbulente**, cu pereții conductei **netezi** (**grosimea filmului laminar** $\delta = \frac{30 \cdot D}{\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda}}$ depășește grosimea asperităților), iar coeficientul de rezistență λ depinde numai de numărul Reynolds și se estimează cu:

- Formula lui H. Blasius:

$$\lambda = \frac{0,316}{\text{Re}^{1/4}}$$

- Formula lui L. Prandtl:

$$\lambda = \frac{1}{(1,8 \cdot \log \text{Re} - 1,64)^2}$$

- **ZONA III** corespunde mișcării **turbulente** și este o zonă de **tranziție** între mișcarea turbulentă în conducte cu **pereți netezi** și cea cu **pereți rușoși**. Coeficientul de rezistență λ este în funcție de **numărul Reynolds** și de **rugozitatea relativă** (k/r_0) iar relația de calcul recomandată este relația Colebrook-White (1939):

$$\frac{1}{\lambda} = -2 \cdot \log \left(\frac{2,5}{\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3,7 \cdot D} \right)$$

- **ZONA IV** corespunde mișcării **turbulente** în conducte cu **pereți rușoși**. Coeficientul de rezistență λ nu depinde de numărul Reynolds și poate fi evaluat cu formula:

$$\lambda = \frac{1}{4 \left[\log \left(\frac{3,71 \cdot D}{k} \right) \right]^2}$$

Pierderea de sarcină longitudinală/distribuită este în acest caz proporțională cu pătratul vitezei și din acest motiv ZONA I se numește și **zona pătratică**.

5.2.2.4. Panta hidrolică și debitul conductelor

Local, pierderile de sarcină longitudinale/ distribuite se caracterizează prin panta hidrolică/ pierderea de sarcină unitară (J):

$$J = \frac{dh_D}{dL} \text{ sau } J = \frac{h_D}{L} = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

Panta hidrolică, pentru o conductă cu secțiunea circulară, poate fi exprimată în funcție de raza hidrolică (R_h):

$$R_h \cdot J = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g} \cdot R_h = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g} \cdot \frac{D}{4} = \frac{\lambda \cdot V^2}{8 \cdot g}$$

relație din care se evaluează viteza medie a curentului de fluid:

$$V = \sqrt{\frac{8 \cdot g}{\lambda}} \cdot \sqrt{R_h \cdot J}$$

în care

$$\sqrt{\frac{8 \cdot g}{\lambda}} = C$$

constantă a conductei, numit **coeficientul de rezistență hidrolică al lui Chezy**, valabil atât pentru conducte **sub presiune** cât și pentru mișcarea uniformă a curenturilor cu **suprafață liberă** (Fig.5.9).

Debitul curentului de fluid real cu secțiune finită, în aceste condiții poate fi exprimat în funcție de panta hidrolică, sub forma:

$$Q = V \cdot \Omega = C \cdot \Omega \cdot \sqrt{R_h \cdot J} = C \cdot \Omega \cdot \sqrt{R_h} \cdot \sqrt{J} = K \cdot \sqrt{J}$$

$K = C \cdot \Omega \cdot \sqrt{R_h}$ este numit **modul de debit** sau **capacitatea de curgere a conductei**, are semnificația unui **debit specific al secțiunii**, fiind o constantă pentru conducta considerată.

Modulul de debit (K) exprimă debitul ce trece prin conducta sau canalul considerat la o pantă hidrolică egală cu unitatea ($Q = K \cdot \sqrt{J}$).

Valorile modulului de debit depind de geometria secțiunii de curgere și de rugozitatea conductei sau albiei (tabelul 5.1 fig.5.11).

Tabelul 5.1. Valori ale modulului de debit (K)

D[mm]	Ω [m ²]	K[litru/sec]		
		Conducte curate	Condiții normale	Conducte murdare
		$C_0 = \frac{1}{n} = 90$ ($n = 0,011$)	$C_0 = \frac{1}{n} = 80$ ($n = 0,01250$)	$C_0 = \frac{1}{n} = 70$ ($n = 0,0143$)
50	0,00196	9,624	8,46	7,403
75	0,00445	28,37	24,94	21,83
100	0,00785	61,11	53,72	47,01
125	0,01227	110,80	97,40	85,23
150	0,01767	180,20	158,40	138,60
175	0,02405	271,80	238,90	209,60
200	0,03142	388,00	341,10	298,50
225	0,03976	531,20	467,00	408,60
250	0,04909	703,50	618,50	541,20
300	0,07068	1144,00	1006,00	880,00
350	0,09621	1726,00	1517,00	1327,00
400	0,12566	2464,00	2166,00	1895,00
450	0,15904	3373,00	2965,00	2595,00
500	0,19635	4467,00	3927,00	3436,00
600	0,28274	7264,00	6386,00	5587,00
700	0,38465	10960,00	9632,00	8428,00
750	0,44179	13170,00	11580,00	10130,00
800	0,50266	15640,00	13750,00	12030,00
900	0,63617	21420,00	18830,00	16470,00
1000	0,78540	28360,00	24930,00	21820,00
1200	1,13090	46120,00	40550,00	35480,00
1400	1,53940	69570,00	61160,00	53520,00
1600	2,01060	99330,00	87320,00	76410,00
1800	2,54470	136000,00	119500,00	10460,00
2000	3,14160	180100,00	158300,00	138500,00

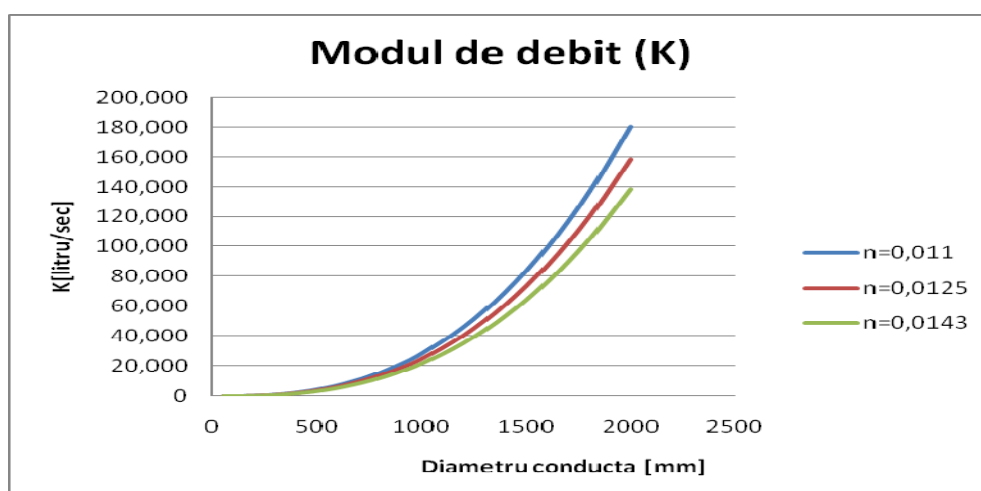


Fig. 5.11. Valori ale modulului de debit pentru conducte circulare din fontă și oțel

Ținând seamă de relația de definiție a pantei hidraulice rezultă că:

$$h_D = \frac{Q^2}{K^2} \cdot L$$

Coefficientul lui Chezy poate fi calculat cu :

- Formula lui MANNING (1890):

$$C = \frac{1}{n} \cdot R_h^{1/6}$$

- Formula lui PAVLOVSKI (1925):

$$C = \frac{1}{n} \cdot R_h^y$$

formule în care:

n - coeficientul adimensional de rugozitate (**Tabelul 5.2**);

R_h - raza hidraulică;

$$y = 2,5 \cdot \sqrt{n} - 0,13 - 0,75 \cdot \sqrt{R_h} \cdot (\sqrt{n} - 0,1)$$

Tabelul 5.2. Coeficienți de rugozitate (n)

Nr. crt.	Natura pereților conductei	n [-]
1	Suprafețe acoperite cu email sau smalt	0,009
2	Tencuială din ciment curat	0,010
3	Conducte din ceramică, țevi de fontă și fier îmbinate corect	0,011
4	Conducte de apă normale; conducte de scurgere foarte curate	0,012
5	Canale acoperite cu un strat gros și stabil de măt	0,018
6	Canale în pamânt, aflate în condiții bune de întreținere	0,023
7	Râuri și pâraie în condiții favorabile (curgere liberă, fără vegetație)	0,025
8	Canale și râuri parțial acoperite cu ierburi acvatice și bolovani	0,030
9	Canale și râuri în condiții rele (ierburi, bolovani, prabușiri de maluri)	0,035
10	Canale și râuri în condiții rele, bucăți de stâncă în albie, rădăcini.	0,040

5.2.2.5. Pierderile de sarcină hidraulică locale

Pierderile de sarcină hidraulică locală (h_L) se produc pe **distanțe scurte**, la mișcările sub presiune, datorită schimbărilor de secțiuni, schimbărilor de direcție, ramificațiilor curentului de fluid, și se calculează cu formula:

$$h_L = \zeta \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

în care

ζ este coeficientul de rezistență locală care se determină ca și coeficientul de rezistență adimensională λ pe cale experimentală și în puține cazuri pe cale analitică.

Coeficientul de rezistență locală depinde de caracteristicile geometrice ale elementului care produce rezistența hidraulică locală și de rugozitate:

- **lărgirea bruscă a secțiunii de curgere:** (Fig.5.12.)

$$\zeta = \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2$$

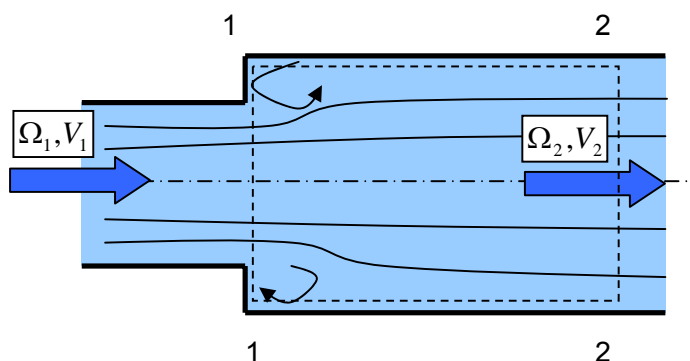


Fig.5.12. Lărgire bruscă a secțiunii de curgere

- **îngustarea bruscă a secțiunii de curgere:**

$$\zeta = 0,5 \cdot \left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)$$

- **intrare în rezervor cu dimensiuni mari** se face prin disiparea totală a **energiei cinetice** astfel încât:

$$\zeta = \alpha$$

în care

α -coeficientul Coriolis

- **ieșirea din rezervor de dimensiuni mari în conductă:**

$$\zeta = 0,5 \text{ pentru muchii ascuțiți}$$

$$\zeta = 0,2 \text{ pentru muchii rotunjite}$$

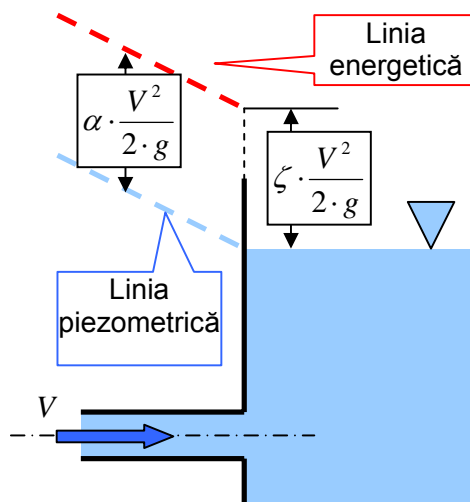


Fig.5.13. Intrarea în rezervor mare

- *curbe de conducte*

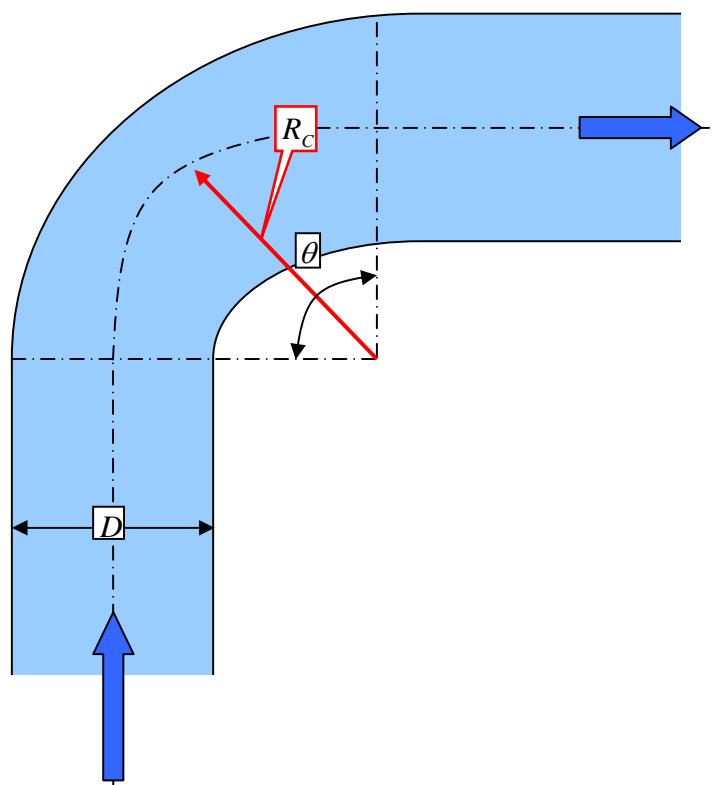


Fig.5.14 Curbă de conductă

Datorită curenților transversali, pierderile locale se amplifică și valorile rezistențelor locale se estimează cu relațiile:

$$\zeta_{\theta} = \zeta_{90} \cdot \sqrt{\frac{\theta}{R_c}}$$

în care

$$\zeta_{90} = 0,13 + 0,16 \cdot \left(\frac{D}{R_c}\right)^{3,5}$$

5.2.2.6. Șocul hidraulic (lovitura de berbec)

Șocul hidraulic este variația rapidă a presiunii care apare în conductele sub presiune ca rezultat al manevrării vanelor:

- **Șoc pozitiv**, la închiderea vanelor, presiunea crește în amonte de vană și scade în aval de aceasta;
- **Șoc negativ**, la deschiderea vanelor, presiunea scade în amonte de vană și crește în aval de aceasta.

Cauza variației presiunilor este transformarea energiei cinetice a fluidului din conductă în lucru mecanic. Variația rapidă de presiune se propagă sub forma unei **unde de presiune**, a cărei viteză de propagare (c) este determinată de compresibilitatea fluidului și elasticitatea pereților conductei, fiind viteza de propagare a sunetului în fluid.

Creșterea de presiune (δp) care apare la închiderea bruscă a unei vane amplasate pe o conductă sub presiune se stabilește folosind teorema impulsului (N.E.Jukovski) și are formula de calcul:

$$\delta p = \rho \cdot c \cdot (u_0 - u)$$

în care

ρ - densitatea fluidului;

c - viteza de propagare a undei de presiune (viteza de propagare a sunetului în fluid);

u_0 - viteza inițială a fluidului;

u - viteza fluidului după închiderea vanei

Viteza de propagare a undei de presiune (c) pentru conductele circulare cu pereți din material omogen se calculează cu formula:

$$c = \sqrt{\frac{E_f}{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{E_f \cdot D}{E_C \cdot G_C}}}$$

în care

E_f, E_C - moduli de delasticitate ai fluidului și ai materialului din care sunt construiți pereții conductei;

D - diametrul interior al conductei;

G_C - grosimea pereților conductei

Pentru conductele cu **pereți rigizi** ($E_C \rightarrow \infty$) se obține pentru **apă**, o viteză de propagare a undei de presiune:

$$c = \sqrt{\frac{E_{apa}}{\rho_{apa}}} = \frac{1}{\sqrt{\beta_{apa} \cdot \rho_{apa}}} = 1425 \text{ m / sec}$$

5.2.2.7. Conducte neramificare cu diametru variabil

Conducta simplă este o conductă, cu diametru variabil, fără ramificații, în care curgerea se conformează ecuației lui Bernoulli:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g} + h_T = \text{const.}$$

unde

h_T - pierderea de sarcină rezultată din însumarea a două categorii de pierderi de sarcină hidraulică:

- **pierderile de sarcină distribuite** pe cele n tronsoane de diametre diferite (h_D):

$$h_D = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \cdot \frac{V_i^2}{2 \cdot g \cdot D_i} \cdot L_i$$

- **pierderile de sarcină locale** din cele m poziții cu pierderi locale (h_L)

$$h_L = \sum_{j=1}^{j=m} \zeta_j \cdot \frac{V_j^2}{2 \cdot g}$$

adică:

$$h_T = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \cdot \frac{V_i^2}{2 \cdot g \cdot D_i} \cdot L_i + \sum_{j=1}^{j=m} \zeta_j \cdot \frac{V_j^2}{2 \cdot g}$$

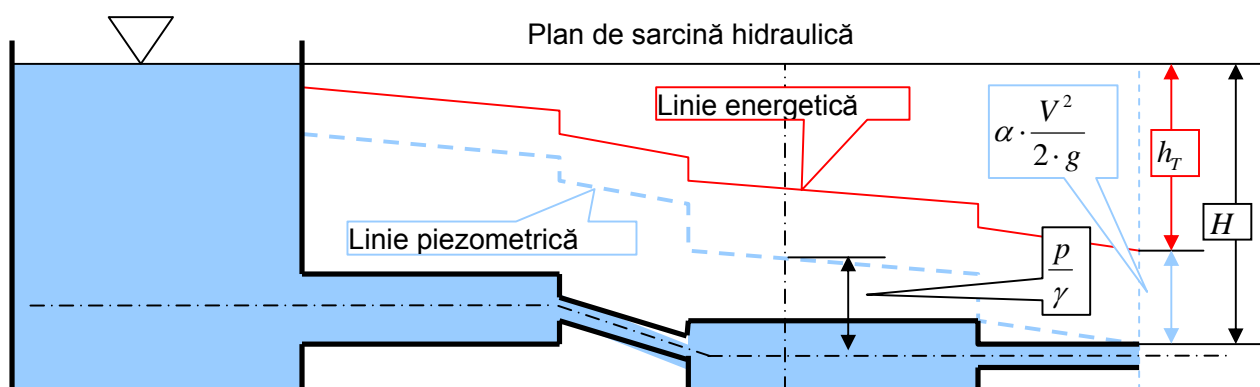


Fig.5.15. Elementele pierderilor de sarcină la o conductă simplă neramificată

Probleme principale care se pun la calculul unei conducte simple sunt:

- Verificarea capacității de transport a debitului (Q) pentru o conductă de diametru (D) și lungime (L), la o diferență de nivel (H) cunoscută;
- Determinarea diferenței de nivel (H) necesară pentru transportul unui anumit debit (Q) printr-o conductă de un anumit diametru (D) și lungime (L);
- Determinarea diametrului unei conducte (D) care să transporte un anumit debit (Q) la o diferență de nivel dată (H) pe o lungime dată (L).

Relațiile utilizate sunt:

$$h_D = \frac{Q^2}{K^2} \cdot L \quad K = C \cdot \Omega \cdot \sqrt{R_h} \quad \sqrt{\frac{8 \cdot g}{\lambda}} = C$$

$$h_D = \lambda \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g \cdot D} \cdot L \quad h_L = \zeta \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

5.2.3.8. Conducte legate în paralel

Curgerea apei într-o rețea de conducte legate în paralel (**Fig.5.16.**) se face pe baza aceleiași diferențe de nivel :

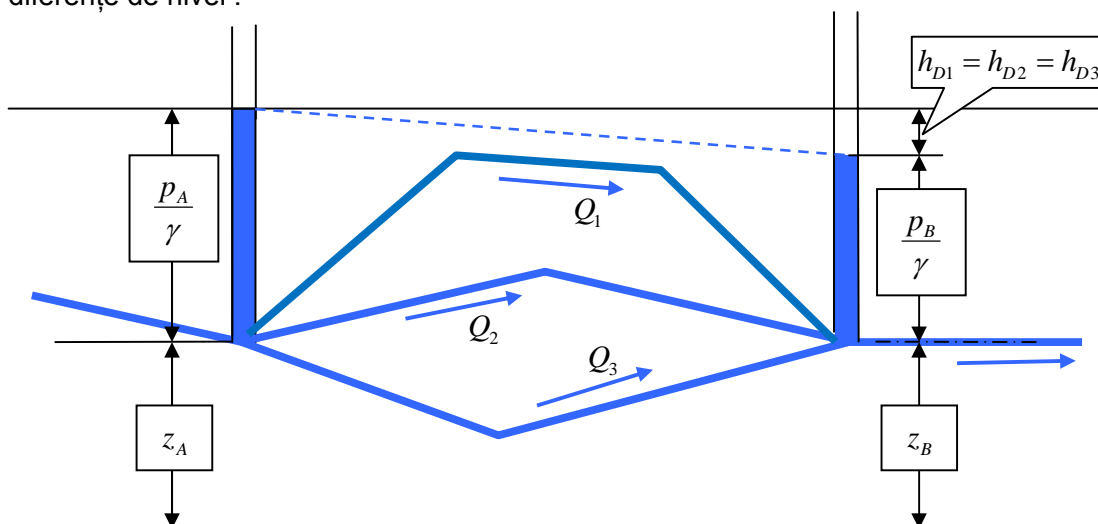


Fig.5.16. Conducte în paralel

$$h_{D1} = h_{D2} = h_{D3} = \left(z_A + \frac{p_A}{\gamma} \right) - \left(z_B + \frac{p_B}{\gamma} \right)$$

sau exprimată în funcție de debitul total și modul de debit:

$$\frac{Q_1^2}{K_1^2} \cdot L_1 = \frac{Q_2^2}{K_2^2} \cdot L_2 = \frac{Q_3^2}{K_3^2} \cdot L_3 = H_{A-B}$$

Relația dintre debitele conductelor (Q_1, Q_2, Q_3) și debitul total (Q), conform principiului conservării masei de debit, este:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

Ecuțiile (), () și () permit determinarea debitelor celor trei conducte pe baza elementelor geometrice ale conductelor și cea debitului total (Q)

5.2.2.9. Conducte ramificate

Sistemul de conducte ramificate (**Fig.5.17.**) se calculează pe baza:

- **ecuației de continuitate** care stabilește relațiile dintre debitele care curg prin conducte:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 + Q_4$$

- **ecuațiilor energetice** pentru fiecare ramificație:

$$H_2 = \frac{Q_1^2}{K_1^2} \cdot L_1 + \frac{Q_2^2}{K_2^2} \cdot L_2$$

$$H_3 = \frac{Q_1^2}{K_1^2} \cdot L_1 + \frac{Q_3^2}{K_3^2} \cdot L_3$$

$$H_4 = \frac{Q_1^2}{K_1^2} \cdot L_1 + \frac{Q_4^2}{K_4^2} \cdot L_4$$

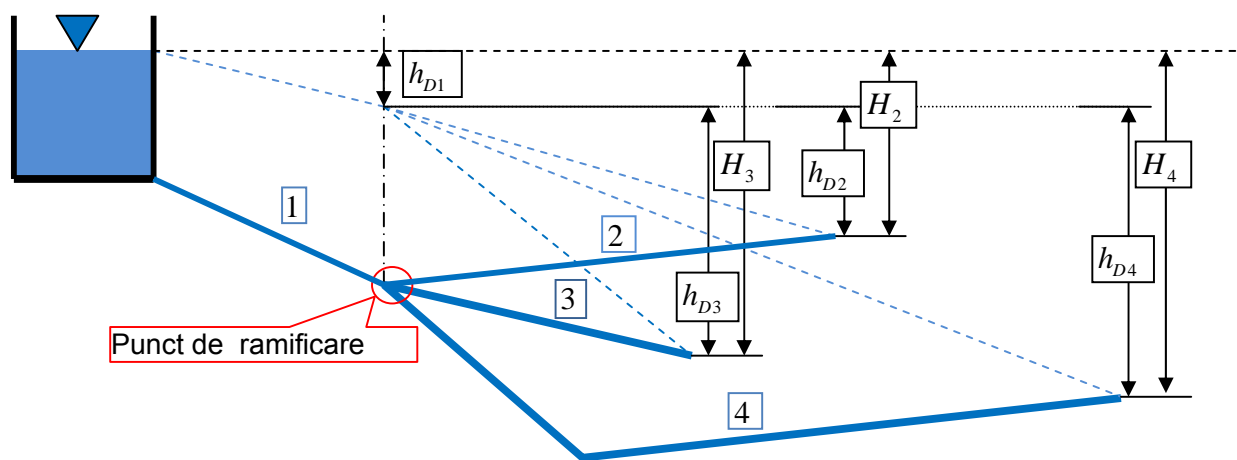


Fig.5.17. Conductă ramificată

5.2.2.10. Conducte cu debit uniform distribuit

Conducta cu debit distribuit este o conductă în care **punctele de consum** sunt foarte apropiate și aproximativ egale ca debit (**Fig.5.18.**). În aceste condiții se admite că din conductă se consumă un **debit uniform distribuit** (q). Linia piezometrică este o curbă cu concavitatea în sus

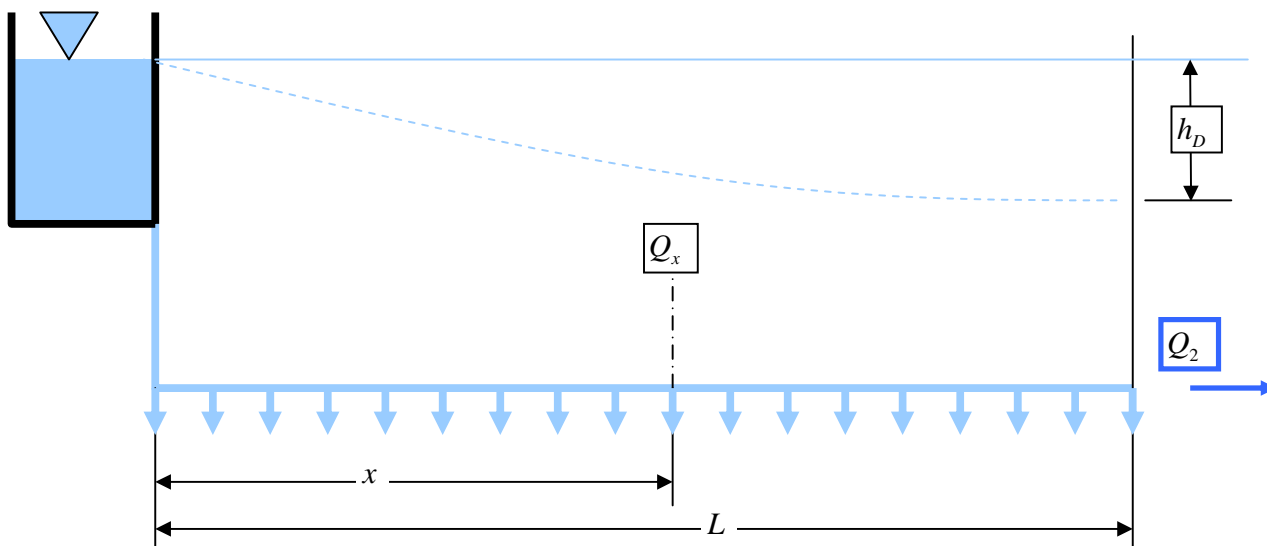


Fig.5.18. Conductă cu debit uniform distribuit

pentru că debitul descrește în sensul curgerii.

Pierderea de sarcină distribuită pe lungimea unei conducte (L) pe care se consumă debitul uniform distribuit (q) este în funcție de:

- modulul de debit al conductei (K)
- debitul uniform distribuit (q):

$$q = \frac{Q_1}{L}$$

Q_1 - debitul consumat pe lungimea L a conductei ($Q_1 = q \cdot L$)

- variația debitului total de-a lungul conductei (Q_x)

$$Q_x = Q_1 + Q_2 - q \cdot x; \quad x \in [0; L]$$

Q_2 - debitul care trece mai departe

- pierderea de sarcină specifică (J_x):

$$J_x = \frac{Q_x^2}{K^2} = \frac{dh_D}{dx}$$

Pierderea de sarcină hidraulică de-a lungul conductei de lungime L se obține prin integrarea pe lungimea conductei a pierderii de sarcină specifică :

$$h_D = \int_0^L J_x \cdot dx = \int_0^L \frac{Q_x^2}{K^2} \cdot dx = \int_0^L \frac{(Q_1 + Q_2 - q \cdot x)^2}{K^2} \cdot dx$$

expresie care după efectuarea calculelor devine:

$$h_D = \frac{\left(Q_2^2 + \frac{1}{3} \cdot Q_1^2 + Q_1 \cdot Q_2 \right)}{K^2} \cdot L$$

Dacă debitul consumat este nul ($Q_1 = 0$) se ajunge la formula generală de calcul a pierderii de sarcină hidraulică distribuită pentru o conductă simplă, sub presiune, cu diametru constant:

$$h_D = \frac{Q_2^2}{K^2} \cdot L$$

5.2.3. Mișcarea uniformă a curenților cu suprafață liberă

Mișcarea uniformă a curenților cu nivel liber se realizează doar în canale cu secțiune transversală **dreptunghiulară** în care curge **laminar** un **debit constant**.

Regimul laminar are ca parametru reper **numărul Reynolds** (http://www.ahgr.ro/media/153361/1.4.2_reynolds.pdf) definit pentru **conducte** cu relația:

$$Re_{conducta} = \frac{V \cdot D}{\nu}$$

V - viteza de curgere a fluidului;

D - diametrul conductei

ν - vâscozitatea cinematică

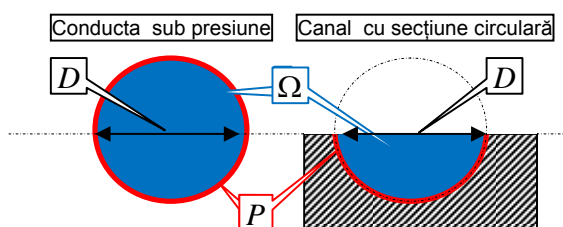


Fig.5.19a. Numărul Reynolds critic la canal este de patru ori mai mare decât la conductă

La canale, diametrul D este înlocuit cu raza hidraulică a conductei (**Fig.5.9** din <http://www.ahgr.ro/media/157830/5.2.2.0.miscarea-permanenta-in-sisteme-de-conducte.pdf>), astfel că numărul Reynolds critic, de trecere de la regim laminar la cel turbulent, este de patru ori mai mic decât la conducte (**Fig.5.19a**):

$$Re_{canal} = \frac{V \cdot R_{canal}}{\nu} = \frac{V \cdot D}{4 \cdot \nu} = 4 \cdot Re_{conducta}$$

în care

$$R_{canal} = \frac{\Omega_{canal}}{P_{canal}} = \frac{\frac{\pi \cdot D^2}{8}}{\frac{\pi \cdot D}{2}} = \frac{D}{4}$$

R_{canal} - raza hidraulică pentru canal:

Valorile critice pentru delimitarea domeniilor de curgere sunt:

- regim laminar: $Re_{cr} = 500 - 600$
- zona de tranziție: $Re_{cr} = 600 - 2000$ și în condiții instabile chiar până la $Re_{cr} = 12500$
- regim turbulent: $Re_{cr} > 12500$

(C. Mateescu, Editura didactică și pedagogică, 1963: <https://www.scribd.com/doc/236007461/Cristea-Mateescu-Hidraulica>)

Curgerea apei în canale și râuri nu este permanentă și uniformă deoarece:

- traseul canalelor și râurilor nu este rectiliniu
- secțiunea nu are o formă constantă de-a lungul curgerii
- rugozitatea variază de-a lungul curgerii
- curenții de aer perturbă suprafața apei

În aceste condiții, cu toată instabilitatea regimului de curgere, vitezele, presiunile și nivelurile se mențin „paracic” constante pe intervale de timp suficient de „mari”:

- viteza medie este evaluată cu relația: $V = \frac{Q}{\Omega}$
- legea fundamentală a cugerii fiind legea lui Chezy: $V = C \cdot \sqrt{R_h \cdot J}$

5.2.3.1. Legea fundamentală a curgerii uniforme cu suprafață liberă

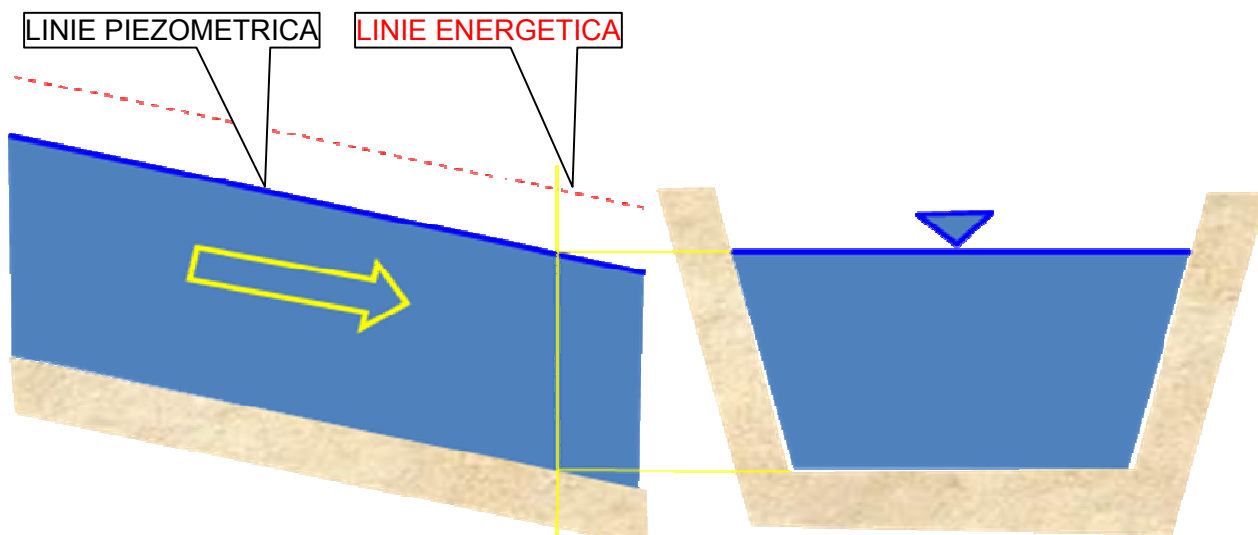


Fig.5.19. Curgerea uniformă a apei în canale și râuri

Legea lui Chezy pentru curgerea uniformă cu suprafață liberă (**Fig.5.19b**) are forma:

$$V = C \cdot \sqrt{R_h \cdot J}$$

în care

R_h – Raza hidraulică:

- la curgerea laminară nu are semnificație
- la curgerea turbulentă:
 - corect aplicabilă la secțiuni dreptunghiulare și triunghiulare
 - eronat la secțiuni semicirculare (supraestimare cu 10%)
 - se recomandă descompunerea secțiunilor complexe în secțiuni componente pentru introducerea neomogenităților de rugozitate

C – coeficientul Chezy se calculează cu formulele:

- Manning:

$$C = \frac{1}{n} \cdot R_h^{\frac{1}{6}}$$

- Pavlovski

$$C = \frac{1}{n} \cdot R_h^y = \sqrt{\frac{8 \cdot g}{\lambda}} \text{ cu } y = 2,5 \cdot \sqrt{n} - 0,13 - 0,75 \cdot \sqrt{R_h} \cdot (\sqrt{n} - 0,1)$$

n – coeficient de rugozitate;

λ – coeficient de rezistența adimensional

- Ganguillet-Kutter:

$$C = \frac{\left(23 + \frac{0,00155}{i}\right) + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{i}\right) \cdot \frac{n}{\sqrt{R_h}}}$$

care pentru $i > 0,0005$ se utilizeza sub forma

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{23 \cdot n}{\sqrt{R_h}}}$$

5.2.3.2. Dimensionarea canalelor

Formula generală pentru dimensionarea canalelor este:

$$Q = \Omega \cdot V = \Omega \cdot C \cdot \sqrt{R_h \cdot J} = K \cdot \sqrt{J}$$

în care

$K = \Omega \cdot C \cdot \sqrt{R_h}$ - modulul de debit care depinde de geometria albiei și rugozitatea talvegului.

Obiectivele dimensionării sunt:

- Evaluarea **secțiunii de curgere** și a pantei pentru a asigura transferul unui **debit maxim** cu un consum de energie minim;
- Stabilirea **vitezei și pantei** care să asigure **amortizarea** rapidă a investiției;
- Stabilirea **vitezei limită** la care începe **degradarea** pereților canalului;
- Stabilirea **forme** secțiunii de curgere a canalului în funcție de scopul întrebuițării acestuia:
 - canale de desecare (profil dublu, pentru ape mari și mici)
 - canale industriale (forma trapezoidală)
 - canale de navigație (forma poligonală sau trapezoidală)
 - canale orașenești pentru ape uzate (profil circular sau ovoidal)

5.2.3.2.1. Evaluarea secțiunii optime de curgere

$$Q = \Omega \cdot V = \Omega \cdot C \cdot \sqrt{R_h \cdot J} = K \cdot \sqrt{J} \text{ și dacă } C = \frac{1}{n} \cdot R_h^J \text{ rezultă că } Q = \Omega \cdot \frac{1}{n} \cdot R_h^{y+0,5} \cdot J^{0,5}$$

Criteriul de optimizare a secțiunii de curgere conduce la găsirea razei hidraulice maxime care se realizează atunci când perimetrul udat este minim ($R_h = \frac{\Omega}{P}$).

Exprimând secțiunea de curgere și perimetrul udat cu elementele geometrice ale secțiunii (**Fig.5.20**):

$$\Omega = \frac{(b + b + 2 \cdot h \cdot \text{ctg} \alpha) \cdot h}{2} = h \cdot (b + h \cdot \text{ctg} \alpha) \text{ și } P = b + 2 \cdot \sqrt{h^2 + h^2 \cdot \text{ctg}^2 \alpha} = b + 2 \cdot h \cdot \sqrt{1 + \text{ctg}^2 \alpha}$$

Condițiile de optimizare sunt:

$$\begin{cases} \frac{d\Omega}{dh} = 0 \\ \frac{dP}{dh} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d[h \cdot (b + h \cdot \text{ctg} \alpha)]}{dh} = 0 \\ \frac{d(b + 2 \cdot h \cdot \sqrt{1 + \text{ctg}^2 \alpha})}{dh} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + 2 \cdot h \cdot \text{ctg} \alpha + h \cdot \frac{db}{dh} = 0 \\ \frac{db}{dh} + 2 \cdot \sqrt{1 + \text{ctg}^2 \alpha} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{b}{h} = 2 \cdot (\sqrt{1 + \text{ctg}^2 \alpha} - \text{ctg} \alpha)$$

Prin înlocuirea lui b în ecuațiile secțiunii și perimetrului se obține:

$$\begin{cases} \Omega = h^2 \cdot (\sqrt{1 + \text{ctg}^2 \alpha} - \text{ctg} \alpha) \\ P = 2 \cdot h \cdot (\sqrt{1 + \text{ctg}^2 \alpha} - \text{ctg} \alpha) \end{cases} \Rightarrow \Omega = P \cdot \frac{h}{2}$$

Într-o **secțiune optimă de curgere** (cu un consum minim de energie necesar transportului unui debit dat), perimetrul udat este circumscris cercului cu raza h

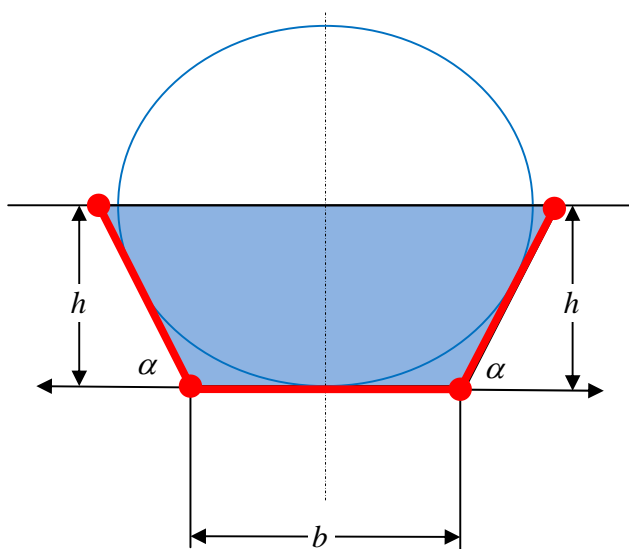


Fig.5.20. Secțiunea optimă de curgere

5.3. MODELE DE SEDIMENTARE ÎN REGIM HIDRODINAMIC (MS2)

Modelarea sedimentării în regim hidrodinamic abordează analiza mișcării particulelor solide în două variante:

- *deplasarea particulei prin alunecare în contact cu substratul solid*
- *deplasarea particulei în suspensie*

5.3.1. Deplasarea particulei prin alunecare în contact cu substratul solid (MS2.1)

Declansarea mișcării unei particule aflată în repaus pe un substrat solid se face prin **rostogolire**, proces care necesită cel mai mic consum de energie dar care este greu de modelat în condițiile heterogenității formei și dimensiunii granulelor minerale.

Pentru evaluarea deplasării sedimentelor în curentul de apă este luat în considerare procesul de antrenare al sedimentelor prin **alunecare** pe substratul solid, proces care sustine energetic deplasarea sedimentelor după ieșirea din starea de repaus.

În anumite condiții (vezi paragraful 5.3.2.1.) deplasarea particulelor solide implică și desprinderea lor de substratul solid ajungând în **suspensie** în curentul de apă. Separarea celor două procese de deplasare prin **alunecare** în contact cu substratul solid și în **suspensie** este o problemă dificil de rezolvat.

5.3.1.1. Viteza de antrenare prin alunecare pe substrat solid

Forța frontală (F_x) este cea care determină mișcarea particulei solide prin alunecare pe substratul solid, forță care (**Fig.5.21**):

- în regim laminar este proporțională cu V_{apa} (viteza fluidului din vecinătatea substratului solid)
- în regim turbulent este proporțională cu V_{apa}^2

$$F_x = K_1 \cdot \mu \cdot D \cdot V_{apa} + K_2 \cdot \rho \cdot D^2 \cdot V_{apa}^2$$

Forța de portanță (F_y), cea care « ridică » particula solidă de pe substratul solid se exprimă numai prin termenul pătratic :

$$F_y = K_y \cdot \rho \cdot D^2 \cdot V_{apa}^2$$

Viteza fluidului V_{apa} la o anumită distanță de substratul solid ($\alpha \cdot D; \alpha < 1$) depinde de legea de distribuție a vitezelor curentului de fluid și pentru o distribuție logaritmică ea poate fi evaluată cu (**Fig.5.21**) :

$$V_{apa}(\alpha) = \alpha \cdot \sqrt{g \cdot h \cdot J} \cdot \ln\left(1 + \frac{D}{2 \cdot k}\right)$$

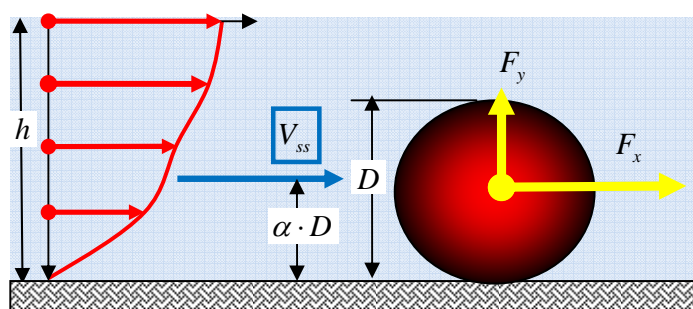


Fig.5.21. Modelul evaluării vitezei de antrenare a particulelor solide într-un curent de apă

în care

K_1, K_2, K_y - constante adimensionale determinate de forma granulelor și heterogenitatea sedimentului

μ - vâscozitatea dinamică a fluidului de antrenare

ρ_{apa} -densitatea fluidului

D - diametrul granulei minerale

h -grosimea curentului de apă

k -rugozitatea absolută exprimată în unități de lungime

J - panta hidrolică

Valorile constantelor se evaluează experimental pentru forme geometrice simple :

- pentru sferă :
 - $K_y = 0,13$
 - $\frac{F_x}{F_y} = 0,35$
- pentru cilindru
- $K_y = 0,3 \div 0,4$
- $\frac{F_x}{F_y} = 0,7$

Viteza limită de antrenare prin alunecare (V_{ss0}) a unei particule sferice se estimează din echilibrul a trei forțe :

- Forța frontală : $F_x = K_1 \cdot \mu \cdot D \cdot V_{ss} + K_2 \cdot \rho \cdot D^2 \cdot V_{ss}^2$
- Forța portantă : $F_y = K_y \cdot \rho \cdot D^2 \cdot V_{ss}^2$
- Forța arhimedică : $F_A = \frac{\pi}{6} \cdot D^3 \cdot g \cdot (\rho_{sed} - \rho_{apa})$

Condiția de antrenare este:

$$F_x > K_{FR} \cdot (F_A - F_y)$$

care după înlocuirea componentelor devine:

$$K_1 \cdot \mu \cdot D \cdot V_{ss} + K_2 \cdot \rho \cdot D^2 \cdot V_{ss}^2 > K_{FR} \cdot \left[\frac{\pi}{6} \cdot D^3 \cdot g \cdot (\rho_{sed} - \rho_{apa}) - K_y \cdot \rho \cdot D^2 \cdot V_{ss}^2 \right] \quad (5.3.1)$$

Viteza minimă a curentului de antrenare (V_{ss0}) prin alunecare pe substrat solid a granulelor minerale se obține prin egalarea celor doi termeni ai inegalității (5.3.1.) care prin neglijarea primului termen din membrul stang (cu valoare foarte mică) devine:

$$K_2 \cdot \rho \cdot D^2 \cdot V_{ss0}^2 = K_{FR} \cdot \left[\frac{\pi}{6} \cdot D^3 \cdot g \cdot (\rho_{sed} - \rho_{apa}) - K_y \cdot \rho \cdot D^2 \cdot V_{ss0}^2 \right]$$

din care rezultă succesiv:

$$V_{ss0}^2 \cdot (K_2 + K_{FR} \cdot K_y) \cdot \rho_{apa} \cdot D^2 = K_{FR} \cdot \left[\frac{\pi}{6} \cdot D^3 \cdot g \cdot (\rho_{sed} - \rho_{apa}) \right]$$

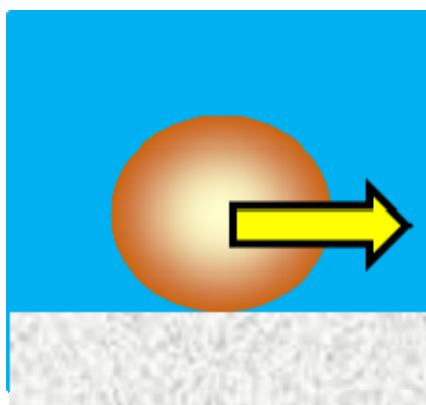
$$V_{ss0} = \sqrt{\frac{\pi \cdot K_{FR}}{6 \cdot (K_2 + K_{FR} \cdot K_y)} \cdot D \cdot g \cdot \left(\frac{\rho_{sed} - \rho_{apa}}{\rho_{apa}} \right)} = K_{ss0} \cdot \sqrt{D \cdot g \cdot \left(\frac{\rho_{sed} - \rho_{apa}}{\rho_{apa}} \right)}$$

Modelul final fiind:

$$V_{ss0} = K_{ss0} \cdot \sqrt{D \cdot g \cdot \left(\frac{\rho_{sed} - \rho_{apa}}{\rho_{apa}} \right)} \quad \text{cu} \quad K_{ss0} = \sqrt{\frac{\pi \cdot K_{FR}}{6 \cdot (K_2 + K_{FR} \cdot K_y)}}$$

Corectat pe baza experimentelor, modelul **vitezei minime de antrenare prin alunecare a** granulelor minerale sferice conduce la:

- $V_{ss0} = \sqrt{g \cdot (15 \cdot D + 0,6)}$; $\bar{V}_{ss0} \left[\frac{cm}{sec} \right]$; $g \left[\frac{cm}{sec^2} \right]$; $D [cm]$ (M.A.Velikanov și N.M. Boicikov)
- $V_{ss0} = 1,4 \cdot \sqrt{D \cdot g} \cdot \left(1 + \ln \frac{h}{7 \cdot D} \right)$ dacă $10 < \frac{h}{D} < 60$ (I.I.Levi)
- $V_{ss0} = 1,4 \cdot \sqrt{D \cdot g} \cdot \ln \frac{h}{7 \cdot D}$ dacă $\frac{h}{D} > 60$ (I.I. Levi)



5.3.1.2. Capacitatea de transport pe substrat solid

Capacitatea de transport pe substrat solid se exprimă prin **debitul solid** (q_s) antrenat prin alunecare pe substratul solid sub forma:

$$q_s : \left[\frac{\text{Kg}_\text{ materie}_\text{ solida}}{\text{secunda} \cdot \text{unitatea}_\text{ de}_\text{ latime}_\text{ a}_\text{ canalului}} \right] \mapsto \text{exemplu} : \left[\frac{\text{Kg}}{\text{sec} \cdot \text{m}} \right]$$

Principiul evaluării debitului solid presupune că **forța de antrenare specifică**:

$$\tau = \gamma \cdot J \cdot h$$

se consumă la antrenarea prin alunecare a unui număr de straturi de sediment din substratul solid, deplasate cu viteze din ce în ce mai mici până la $V_{ss} = 0$ în ultimul strat (**Fig.5.22**):

$$q_s = K_T \cdot \tau(\tau - \tau_0)$$

τ -efortul de antrenare la adâncimea h ; $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right]$

τ_0 -efortul de antrenare la adâncimea h_0 care corespunde vitezei de medii de pornire V_0 ;

adică

$$q_s = K_T \cdot \tau(\tau - \tau_0) = K_T \cdot \gamma \cdot J \cdot h \cdot (\gamma \cdot J \cdot h - \gamma \cdot J \cdot h_0) = K_T \cdot \gamma^2 \cdot J^2 \cdot h \cdot (h - h_0)$$

și după introducerea notației $K_T^* = K_T \cdot \gamma^2$

$$q_s = K_T^* \cdot (h - h_0) \cdot J^2$$

sau după înlocuirea pantei hidraulice (J) și a grosimilor (h, h_0) corespunzătoare vitezelor (\bar{V}_{ss}, V_{ss0}) și constantelor (C, C_0) din legea lui Chezy ($V = C \cdot \sqrt{J \cdot h}$):

$$q_s = K_T^* \cdot \frac{\bar{V}_{ss}^2}{C^2} \left(\frac{\bar{V}_{ss}^2}{C^2} - \frac{V_{ss0}^2}{C_0^2} \right)$$

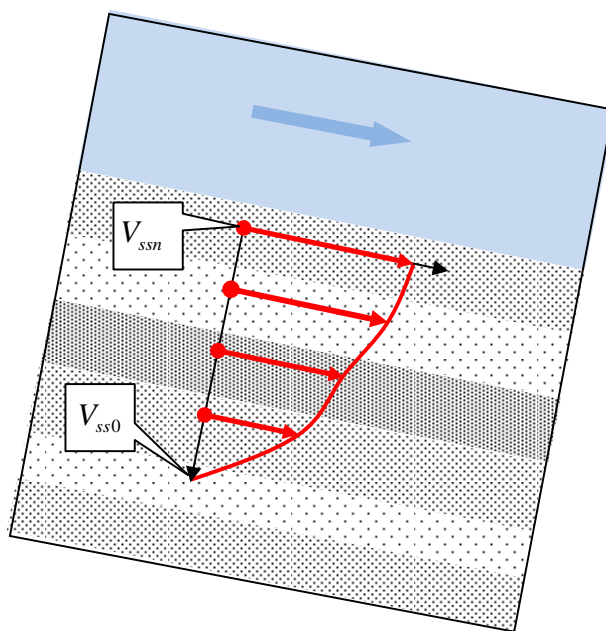


Fig.5.22. Principiul evaluării debitului solid transportat prin antrenare pe substrat solid.

V_{ss0} - viteza minimă de antrenare prin alunecare pe substratul solid

\bar{V}_{ss} - viteza medie de antrenare prin alunecare pe substratul solid

Din confruntarea modelului general cu date experimentale au rezultat formule adaptate pentru:

- nisip uniform (A.Schoklitsch, 1934):

$$q_s = \frac{7000}{\sqrt{D}} \cdot J^{\frac{3}{2}} (q - q_0); \left[\frac{Kg}{sec \cdot m} \right]; D[mm]$$

$q = \bar{V}_{ss} \cdot h$ - debitul lichid corespunzător vitezei medii de antrenare prin alunecare $\left[\frac{m^3}{sec \cdot m} \right]$

$q_0 = V_{ss0} \cdot h_0$ - debitul lichid corespunzător vitezei minime de antrenare prin alunecare $\left[\frac{m^3}{sec \cdot m} \right]$

- aluviuni omogene (V.N. Goncharov, 1938)

$$q_s = 2,08 \cdot \left(\frac{\bar{V}_{ss}}{V_{ss0}} \right) \cdot \left(\frac{D}{h} \right)^{\frac{1}{10}} (\bar{V}_{ss} - V_{ss0}); \left[\frac{Kg}{sec \cdot m} \right]; D[mm]$$

- nisip grosier uniform ($\frac{D}{h} = \frac{1}{300}$) (I.I. Levi):

$$q_s = 2 \cdot \left(\frac{\bar{V}_{ss}}{D \cdot \sqrt{g}} \right)^3 \cdot \left(\frac{D}{h} \right)^{\frac{1}{4}} (\bar{V}_{ss} - V_{ss0}); \left[\frac{Kg}{sec \cdot m} \right]; D[mm]$$

Viteza medie de antrenare prin alunecare (\bar{V}_{ss}) pe substratul solid rezultată pe baza experimentelor în care s-a ținut seama de diametrul granulelor (D) și panta hidrolică (J) s-a concretizat în formula semiempirică (Strickler):

$$\bar{V}_{ss} = 26 \cdot \left(\frac{R}{D} \right)^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{R \cdot J}; \bar{V}_{ss} \left[\frac{m}{sec} \right]; D[m]; R[m]$$

Aplicatie MS2.1.

Să se evalueze debitul de material solid transportat prin antrenare în talvegul unei văi pe un tronson cu lungimea $L = 1000m$, cuprins între cota superioară $Cota_{sup} = 230m$ și cota inferioară $Cota_{inf} = 229m$.

Secțiunea talvegului este dreptunghiulară cu lățimea $b = 5m$ și înălțimea apei $h = 2,0m$ iar materialul aluvionar este constituit din nisip omogen cu diametrul mediu al granulelor $D = 8mm$.

Rezolvare

Pentru evaluarea **debitului unitar de material solid** (q_s) succesiunea etapelor de prelucrare sunt:

- calculul **vitezei medii de antrenare** prin alunecare pe talveg (\bar{V}_{ss}) pentru care se calculează:
 - **raza hidraulică (Fig.5.23):**

$$R = \frac{b \cdot h}{b + 2 \cdot h} = \frac{5 \cdot 2}{5 + 2 \cdot 2} = 1,11m$$

- **panta hidraulică** considerată egală cu panta terenului (curgere uniformă):

$$J = \frac{Cota_{sup} - Cota_{inf}}{L} = \frac{230 - 229}{1000} = 0,001$$

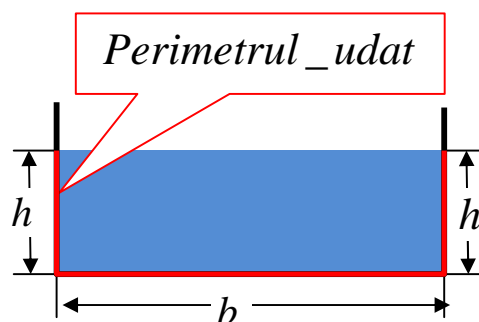


Fig. 5.23. Raza hidraulică

- **viteza medie** de antrenare

$$\bar{V}_{ss} = 26 \cdot \left(\frac{R}{D}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{R \cdot J} = 26 \cdot \left(\frac{1,11}{0,008}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{1,11 \cdot 0,001} = 1,97 \frac{m}{sec}$$

- calculul **debitului râului** (q) pe metru din lățimea talvegului corespunzător vitezei medii de antrenare prin alunecare pe substratul solid (\bar{V}_{ss}):

$$q = h \cdot \bar{V}_{ss} = 2,0 \cdot 1,97 = 3,95 \frac{m^3}{sec \cdot m}$$

- calculul **vitezei minime de antrenare** prin alunecare (V_{ss0}) pentru care se utilizează ecuația lui Velikanov în care diametrul granulelor se introduce în $\left[\frac{cm}{sec}\right]$:

$$V_{ss0} = \sqrt{g \cdot (15 \cdot D + 0,6)} = \sqrt{981 \cdot (15 \cdot 0,8 + 0,6)} = 111,18 \frac{cm}{sec} = 1,11 \frac{m}{sec}$$

- calculul **grosimii curentului de apă** (h_0) corespunzător vitezei minime de antrenare prin alunecare (V_{ss0}) plecând de la formula empirică a lui Chezy :

$$V = C \cdot \sqrt{R \cdot J}; \left[\frac{m}{\text{sec}} \right]$$

în care

$$C = \frac{1}{n} \cdot R^{\frac{1}{6}}; \left[\frac{m^{\frac{1}{2}}}{\text{sec}} \right] \text{ -coeficientul lui Manning}$$

$n[-]$ - coeficientul de rugozitate

(<http://wwwrcamnl.wr.usgs.gov/sws/fieldmethods/Indirects/nvalues/index.htm>)

$R; [m]$ - raza hidraulică care tinde spre grosimea curentului de apă (h) atunci când lățimea curentului de apă (L) este foarte mare în raport cu grosimea acestuia (**Fig.5.23**):

$$R = \frac{\text{Aria_sectiunii_de_curgere}}{\text{Perimetrul_udat}} \rightarrow h$$

toate acestea conducând la forma:

$$V = \frac{1}{n} \cdot R^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{R \cdot J} = \frac{1}{n} \cdot R^{\frac{1}{6}} \cdot R^{\frac{1}{2}} \cdot J^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n} \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot J^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{n} \cdot h^{\frac{2}{3}} \cdot J^{\frac{1}{2}}$$

pe baza căreia se poate evalua grosimea curentului de apă în funcție de viteza medie din secțiunea de curgere:

$$V_{ss0} \approx \frac{1}{n} \cdot h_0^{\frac{2}{3}} \cdot J^{\frac{1}{2}} \quad \text{și} \quad \bar{V}_{ss} \approx \frac{1}{n} \cdot h^{\frac{2}{3}} \cdot J^{\frac{1}{2}}$$

din care prin raportarea celor două ecuații ale vitezelor, rezultă că

$$\frac{V_{ss0}}{V_{ss}} \approx \frac{\frac{1}{n} \cdot h_0^{\frac{2}{3}} \cdot J^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{n} \cdot h^{\frac{2}{3}} \cdot J^{\frac{1}{2}}} \approx \left(\frac{h_0}{h} \right)^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \frac{h_0}{h} \approx \left(\frac{V_{ss0}}{V_{ss}} \right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow h_0 = h \cdot \left(\frac{V_{ss0}}{V_{ss}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$h_0 = h \cdot \left(\frac{V_{ss0}}{V_{ss}} \right)^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \left(\frac{1,11}{1,97} \right)^{\frac{3}{2}} = 0,85m$$

- calculul **debitului unitar al râului** (q_0) (pe metru din latimea talvegului) corespunzător vitezei minime de antrenare (V_{ss0}):

$$q_0 = h_0 \cdot V_{ss0} = 0,85 \cdot 1,11 = 0,94 \frac{m^3}{sec \cdot m}$$

- calculul **debitului unitar solid transportat de râu** (q_s) (pe un metru din lățimea talvegului):

$$q_s = \frac{7000}{\sqrt{D}} \cdot J^{\frac{3}{2}} (q - q_0) = \frac{7000}{\sqrt{8}} \cdot (0,001)^{\frac{3}{2}} (3,94 - 0,94) = 0,24 \frac{Kg}{sec \cdot m}$$

Concluzie: **Debitul total** transportat de râu (pe toată lățimea talvegului ; Q_s) este:

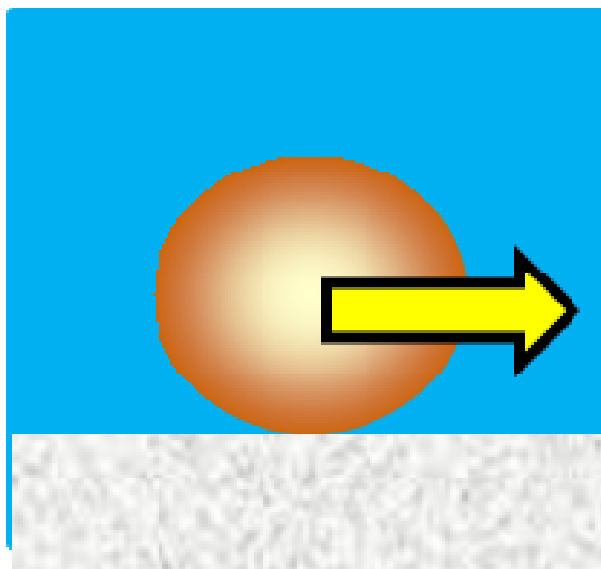
$$Q_s = q_s \cdot b = 0,24 \cdot 5 = 1,18 \frac{kg}{sec} = 3,71 \cdot 10^7 \frac{kg}{an}$$

echivalent cu un volum de nisip (constituit în principal din quart : $\rho_{cuart} = 2650 \frac{kg}{m^3}$) depus într-un an:

$$V_{anual} = \frac{Q_s}{\rho_{cuart}} = \frac{3,71 \cdot 10^7 \frac{kg}{an}}{2650 \frac{kg}{m^3}} = 1,4 \cdot 10^4 \frac{m^3}{an}$$

aluviuni care ar colmata un lac de acumulare de marimea lacului de la Bicaz cu un volum util $V_{util_BICAZ} = 930 \cdot 10^6 m^3$ în:

$$t = \frac{V_{util_BICAZ}}{V_{anual}} = \frac{930 \cdot 10^6}{1,4 \cdot 10^4} = 6,65 \cdot 10^4 ani$$



5.3.2. Deplasarea particulei în suspensie (MS2.2)

Deplasarea particulelor sedimentare ridicate în suspensie de pe substratul solid se face pe o traiectorie sinusoidală, sub acțiunea vitezei de agitație (V') care este în funcție de viteza medie a curentului de fluid. Menținerea în suspensie a particulelor sedimentare este asigurată de o viteză de agitație mai mare ca viteza constantă de sedimentare în regim hidrostatic („*mărima hidraulică*”: \vec{V}_{sed} ; ec. 6.10)

$$V' > \vec{V}_{sed}$$

Modelul conceptual al deplasării particulei în suspensie are următoarele componente:

- **modelul spațial** este un plan vertical, paralel cu direcția de curgere a curentului de apă
- **modelul parametric** este definit de parametrii pentru (**Fig.5.24**):
 - viteza de deplasare a curentului de apă (diagrama variației pe verticală)
 - valoarea vitezei
 - adâncimea
 - viteza de sedimentare în regim hidrostatic
 - caracteristicile fluidului în care se face sedimentarea:
 - densitatea apei: ρ_{apa}
 - vâscozitatea apei: μ_{apa}, ν_{apa}
 - caracteristicile granulei care se sedimentează:
 - densitatea sedimentului: ρ_{sed}
 - masa granulei de sediment: m_{sed}

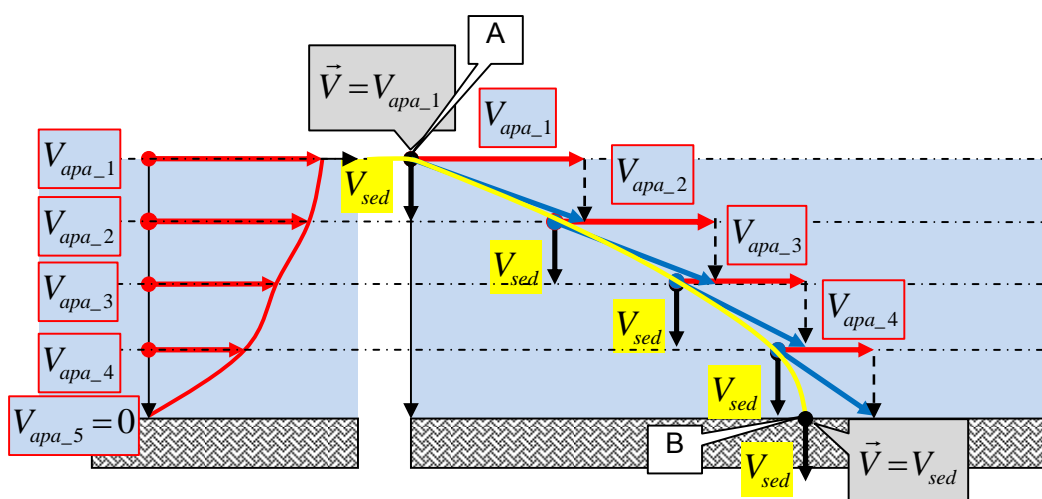


Fig. 5.24. Deplasarea particulelor sedimentare în suspensie, în curent de fluid cu distribuție de viteză cunoscută

- **modelul energetic** ia în considerare trei categorii de forțe:
 - **forțele orizontale** de inerție generate de curentul de apă care se deplasează cu viteze variabile pe adâncime ($V_{apa_1}, V_{apa_2}, \dots, V_{apa_5}$) și care antrenează granulele minerale pe direcție orizontală
 - **forțele verticale** care determină "mărima hidraulică" a granulelor minerale
 - forțele masice care deplasează granulele minerale pe verticală
 - forțele arhimedice care se opun forțelor masice
 - forțele de rezistență cauzate de vâscozitate

Traectoria granulelor minerale rezultă din compunerea grafică a vitezelor orizontale și a vitezei verticale rezultante (V_{sed} : viteza de sedimentare constantă) fiind de precizat că:

- în punctul A (**Fig.5.24**) viteza de deplasare pe orizontală a granulei minerale este considerată egală cu viteza curentului de apă (V_{apa_1}) iar viteza de deplasare pe verticală este zero (deoarece nu a trecut timpul necesar atingerii vitezei de sedimentare), în aceste condiții granula minerală se deplasează pe orizontală, (traectoria este orizontală).
- În punctul B (**Fig.5.24**) viteza de deplasare pe orizontală este zero ($V_{apa_5} = 0$) iar viteza pe verticală este egală cu viteza de sedimentare, astfel încât particula se deplasează pe verticală, traectoria fiind perpendiculară pe limita inferioară a curentului de apă.

Granulele minerale aflate la o anumită adâncime în curentul de apă cad după o traectorie care se aseamănă cu o curbă cuprinsă între o cicloidă și coarda sa. Dacă mișcarea devine turbulentă traectoriile granulelor nu mai pot fi calculate datorită apariției vitezelor cu valori și direcții diferite imposibil de prevăzut.

5.3.2.1. Viteza de deplasare în suspensie

Desprinderea particulei solide de pe substrat se face atunci când forța portantă (F_y) este mai mare decât forța masică (F_G ; **Fig.5.25**):

$$F_y > F_G$$

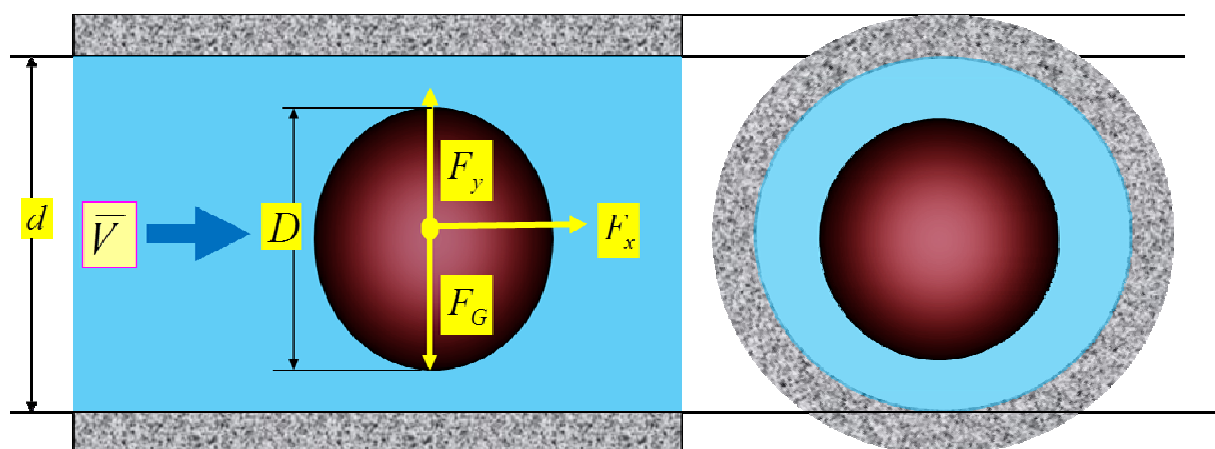


Fig.5.25. Deplasarea unei sfere în regim hidrodinamic în suspensie într-o conductă

$$K_y \cdot \rho_{apa} \cdot D^2 \cdot V_{ssD}^2 > \frac{\pi}{6} \cdot D^3 \cdot g \cdot (\rho_{sed} - \rho_{apa})$$

$$V_{ssD}^2 > \frac{\pi}{6 \cdot K_y} \cdot D \cdot g \cdot \left(\frac{\rho_{sed} - \rho_{apa}}{\rho_{apa}} \right) = K_{ssD} \cdot \sqrt{D \cdot g \cdot \left(\frac{\rho_{sed} - \rho_{apa}}{\rho_{apa}} \right)}$$

condiție din care rezultă viteza curentului care desprinde particula solidă de pe substrat (V_{ssD}):

$$V_{ssD}^2 \geq K_{ssD} \cdot \sqrt{D \cdot g \cdot \left(\frac{\rho_{sed} - \rho_{apa}}{\rho_{apa}} \right)} \quad \text{cu} \quad K_{ssD} = \frac{\pi}{6 \cdot K_y}$$

Menținerea în suspensie a particulei se face dacă viteza medie a curentului de apă este mai mare decât o anumită viteză critică numită **viteză de sedimentare în curent** (V_s).

Viteza de sedimentare în curent depinde de:

- **turbiditatea** (ρ_T) definită ca raport între masa solidă (m_s) raportată la unitatea de volum, turbiditate care este **direct** proporțională cu **turbulența** și **invers** proporțională cu **mărimea hidraulică**
- **mărimea hidraulică** a granulelor minerale (V_{sed} - viteza de sedimentare **constantă** în regim hidrostatic)

și se poate evalua cu formule rezultate din studiile experimentale, valabile pentru transportul aluviunilor în albiile râurilor și canalelor obișnuite ($\rho_T < 5 \div 6 \frac{kg}{m^3}$):

$$\bullet \quad V_s = V_{sed} \cdot \left(\frac{\rho_T}{0,022 \cdot \sqrt{R \cdot J}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{pentru } V_{sed} \geq 0,002 \frac{m}{sec}$$

$$\bullet \quad V_s = \left(\frac{\rho_T \cdot \sqrt{V_{sed}}}{0,022 \cdot \sqrt{R \cdot J}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{pentru } V_{sed} < 0,002 \frac{m}{sec}$$

Materialul sedimentar aflat în exces față de capacitatea de transport în suspensie a curentului de apă este transportat prin alunecare pe substratul solid sau depus pe acesta.

5.3.2.2. Capacitatea de transport în suspensie

Capacitatea de transport în suspensie a sedimentelor în curentul de apă este dată de **volumul de material uscat** care poate fi transportat în **unitatea de timp**, în **stare de saturație**.

Dacă se cunoaște distribuția concentrației sedimentelor ($c(y)$) și distribuția vitezelor ($V_s(y)$) în secțiunea de curgere, prin integrare în secțiune a elementelor de debit solid se obține capacitatea de transport în suspensie ($q_{suspensie}$):

$$q_{suspensie} = \int_0^h c(y) \cdot v(y) \cdot y \cdot 1 \cdot dy; \left[\frac{kg}{sec \cdot m} \right]$$

Deoarece este dificil de cunoscut cu precizie satisfăcătoare distribuția în secțiune a concentrației și vitezelor se preferă o evaluare globală a capacității de transport în suspensie, prin formule empirice care conțin o **viteza medie critică** a curentului saturat, viteză care asigură transportul în suspensie.

Viteza medie critică a curentului saturat (V_{cr}) care asigură transportul în suspensie a sedimentelor poate fi exprimată prin:

$$\frac{V_{cr} - V_{ss0}}{V_{sed}} = f\left(p, \frac{R}{\Delta}\right)$$

în care

- p - consistența amestecului exprimată prin raportul dintre greutatea conținutului în material solid și greutatea conținutului în apă dintr-un volum de amestec [%];
- V_{sed} - mărimea hidraulică a granulelor $\left[\frac{m}{sec} \right]$;
- V_{ss0} - viteza minimă de antrenare prin alunecare pe substratul solid
- R - raza hidraulică a secțiunii de curgere
- Δ - rugozitatea absolută care pentru un canal deschis este egală cu diametrul mediu al granulei materialului sedimentar.

Viteza medie critică a curentului saturat (V_{cr}) pentru un **canal deschis** poate fi estimată cu relația empirică:

$$V_{cr} = 3 \cdot \left[\sqrt{g \cdot D} \cdot \lg\left(\frac{R}{4 \cdot D}\right) + V_{sed} \cdot p^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{R}{D}\right)^{\frac{2}{5}} \right]; \left[\frac{m}{sec} \right]$$

iar procentul de parte solidă din amestecul apă cu sediment în suspensie poate fi estimat cu:

$$p^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{V_{sed}} \left(\frac{V_{cr}}{3} - \sqrt{g \cdot D} \cdot \lg \frac{R}{4 \cdot D} \right) \cdot \left(\frac{D}{R} \right)^{\frac{2}{5}}$$

relație în care se utilizează ca unități de măsură [cm] și [sec] și rezultă [%] de parte solidă în suspensie.

Aplicație MS2.2.

Să se evalueze debitul masic solid transportat în suspensie pe un sistem de conducte dacă se cunosc:

- caracteristicile conductei:
 - Diametrul conductei: $d = 0,4m$
 - Coeficientul lui Manning: $n = 0,014$
 - Cota la partea superioară a conductei: $C_{sup} = 455m$
 - Cota la partea inferioară a conductei: $C_{inf} = 420m$
 - Lungimea conductei: $L = 500m$
- caracteristicile materialului sedimentar
 - densitatea sedimentului: $\rho_{sed} = 2650 \frac{kg}{m^3}$
 - diametrul mediu al granulelor în suspensie: $D = 0,0024m$
- caracteristicile fluidului care transportă sedimentele în suspensie:
 - vâscozitatea dinamică: $\mu = 0,00117 \frac{kg}{m \cdot sec}$
 - densitatea fluidului: $\rho_{fluid} = 1000 \frac{kg}{m^3}$
 - vâscozitate cinematică: $\nu = 1,17 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{sec}$

Rezolvarea parcurge următoarele etape de prelucrare:

- evaluarea vitezei de antrenare în suspensie a sedimentelor
 - calculul pantei hidraulice a conductei

$$J = \frac{C_{sup} - C_{inf}}{L} = \frac{455 - 420}{500} = 0,07$$

- calculul razei hidraulice a conductei

$$R_h = \frac{d}{4} = \frac{0,4}{4} = 0,1m$$

- calculul vitezei de antrenare:

$$\bar{V} = \frac{1}{n} \cdot R_h^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{R_h \cdot J} = \frac{1}{0,014} \cdot 0,1^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{0,1 \cdot 0,07} = 4,07 \frac{m}{sec}$$

- evaluarea debitului în suspensie
 - calculul debitului total al suspensiei

$$Q_{suspensie} = \bar{V} \cdot Sectiune_curgere = \bar{V} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 4,07 \cdot \frac{\pi \cdot 0,4^2}{4} = 0,511 \frac{m^3}{sec}$$

- calculul vitezei de sedimentare în regim hidrostatic

$$V_{sed} = \frac{g \cdot D_s^2}{18 \cdot \nu} \cdot \left(\frac{\rho_s}{\rho_{apa}} - 1 \right) = \frac{9,81 \cdot 0,0024^2}{18 \cdot 1,17 \cdot 10^{-6}} \cdot \left(\frac{2650}{1000} - 1 \right) = 4,43 \frac{m}{sec}$$

- o calculul procentului de sediment în suspensie ([cm] și [sec] în formulă și rezultă [%])

$$p^{\frac{1}{4}} = \left[\frac{1}{V_{sed}} \left(\frac{\bar{V}}{3} - \sqrt{g \cdot D_s} \cdot \lg \frac{R_h}{4 \cdot D_s} \right) \cdot \left(\frac{D_s}{R_h} \right)^{\frac{2}{5}} \right]^4 =$$

$$= \left[\frac{1}{4,54 \cdot 100} \cdot \left(\frac{4,07 \cdot 100}{3} - \sqrt{9,81 \cdot 100 \cdot 0,0024 \cdot 100} \cdot \lg \frac{0,1 \cdot 100}{4 \cdot 0,0024 \cdot 100} \right) \cdot \left(\frac{0,0024 \cdot 100}{0,1 \cdot 100} \right)^{\frac{2}{5}} \right]^4 = 1,39 \cdot 10^{-5} \%$$

- o calculul debitului masic solid în suspensie

$$Q_{MASIC_solid} = Q_{suspensie} \cdot \frac{p}{100} \cdot \rho_s = 0,51 \cdot \frac{1,25 \cdot 10^{-5}}{100} \cdot 2650 \frac{kg}{m^3} = 1,88 \cdot 10^{-4} \frac{kg}{sec}$$

- o calculul debitului volumic lichid al suspensiei

$$Q_{VOL_lichid} = Q_{suspensie} \cdot \left(1 - \frac{p}{100} \right) = 0,511 \frac{m^3}{sec} \cdot \left(1 - \frac{1,27 \cdot 10^{-5}}{100} \right) = 0,512 \frac{m^3}{sec}$$

BIBLIOGRAFIE

MATEESCU CRISTEA , HIDRAULICA (1961), Editura de stat si pedagogică (<https://gruhydroach.files.wordpress.com/2011/03/hidraulica-cristea-mateescu.pdf>)