## 6.4.2. Ecuaţia generală a curgerii sub presiune

Acviferul sub presiune este limitat la partea superioară a formaţiunilor saturate, de un „acoperiş impermeabil" care suportă o ***presiune hidrostatică*** ( $p = \rho_w \cdot g \cdot \Delta h$ ) egală cu presiunea unei coloane de apă cu lungimea egală cu diferenţa dintre cota acoperişului impermeabil şi cota suprafeţei piezometrice ( $\Delta h$ ).

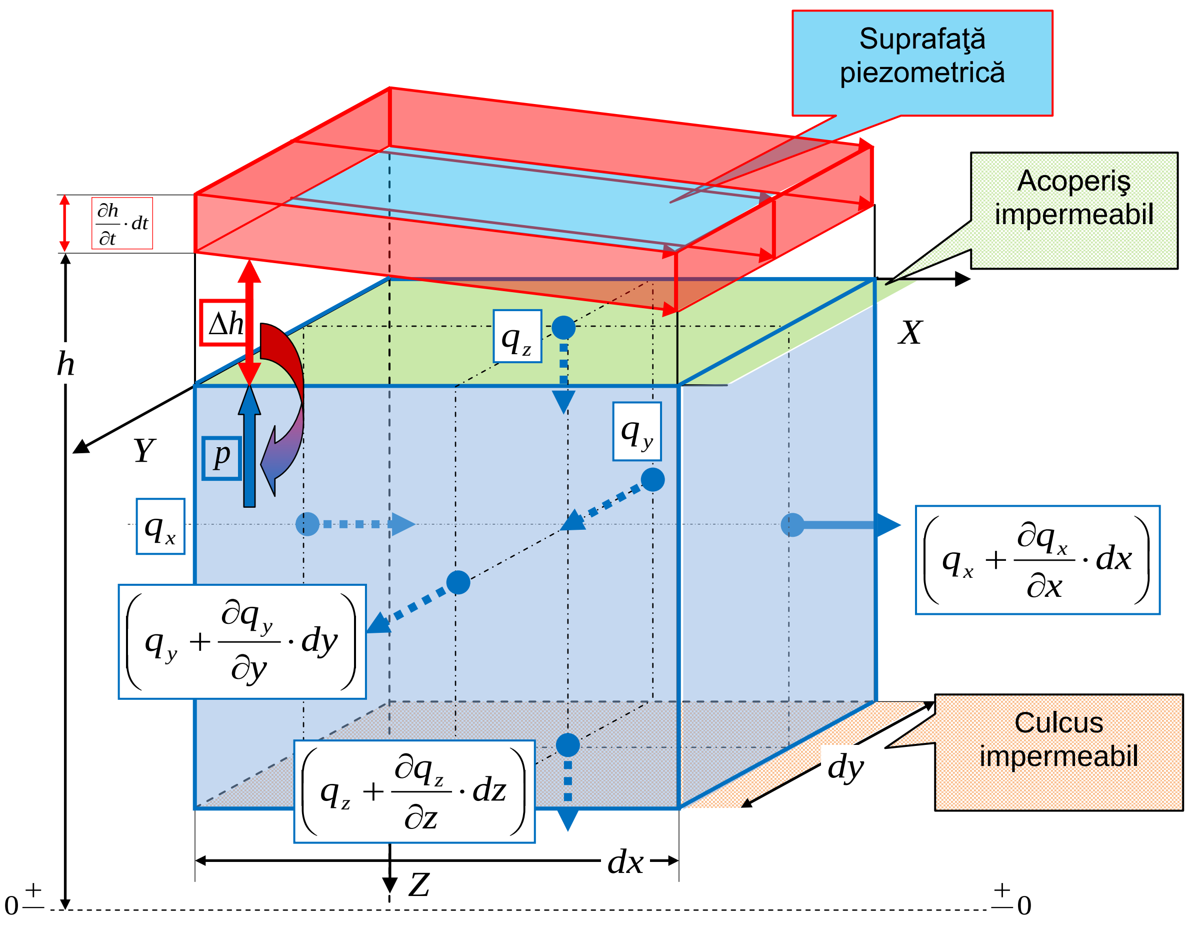



***Fig.1****. Volumul elementar reprezentativ utilizat ca suport pentru metoda bianţului hidric.*

Metoda bilanţului  este aplicată pentru un *volum elementar* ( $dx \cdot dy \cdot dz$ ) (***Fig.1***) dintr-un *acvifer sub presiune*, presupus *omogen* şi *izotrop*, volum prin care apa se deplasează după o singură direcţie.

*Debitul unitar* (*q*) ce traversează acest *volum elementar* este descompus în trei componente ( $q_x, q_y, q_z$ ) orientate paralel cu direcţiile axelor sistemului de referinţă (*Ox, Oy, Oz*) în care este plasat volumul elementar. Stocarea masei de apă din volumul elementar se obţine prin *diferenţa* dintre:

- *masa de apă intrată*:
- paralel cu axa Ox: $\rho_w \cdot q_x \cdot dy \cdot dz$
- paralel cu axa Oy: $\rho_w \cdot q_y \cdot dx \cdot dz$
- paralel cu aza Oz: $\rho_w \cdot q_z \cdot dx \cdot dy$
- şi *masa apă ieşită*:
- paralel cu axa Ox: $\rho_w \cdot q_x \cdot dy \cdot dz + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho_w \cdot q_x) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$
- paralel cu axa Oy: $\rho_w \cdot q_y \cdot dx \cdot dz + \dfrac{\partial}{\partial y}(\rho_w \cdot q_y) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$
- paralel cu axa Oz: $\rho_w \cdot q_z \cdot dx \cdot dy + \dfrac{\partial}{\partial z}(\rho_w \cdot q_z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

Această stocare este:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho_w \cdot q_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho_w \cdot q_y + \frac{\partial}{\partial z}\rho_w \cdot q_z\right)dx \cdot dy \cdot dz \qquad (1)$$

Utilizând legea lui Darcy pentru exprimarea debitelor prin intermediul sarcinii piezometrice ( $h$ ) se obţin ecuaţiile:

$$q_x = -K\frac{\partial h}{\partial x},\ q_y = -K\frac{\partial h}{\partial y},\ q_z = -K\frac{\partial h}{\partial z}$$

care introduse în ecuaţia (1) conduc la expresia masei de apă stocate în volumul elementar pe intervalul de timp ( $\partial t$ ) în care a avut loc traversarea debitului:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = +\rho_w \cdot K \cdot \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z}\right)dx \cdot dy \cdot dz \qquad (2)$$

*Masa de apă* stocată în volumul elemetar în *intervalul de timp* ( $\partial t$ ) este determinată de *densitatea apei* ( $\rho_w$ ) şi *porozitatea totală* (*n*) a materialului permeabil:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w \cdot n \cdot dx \cdot dy \cdot dz) \qquad (3)$$

*Densitatea apei* ( $\rho_w$ ), *dimensiunea pe verticală* (*dz*) a volumului elementar şi *porozitatea*(*n*) sunt controlate de *variaţia presiunii hidrostatice apei*( $P = \rho_w \cdot g \cdot h$ ):

- *compresibilitatea apei* ( $\beta$ ) este factorul care permite evaluarea variaţiei densităţii apei:

$$\frac{d\rho_w}{\rho_w} = \beta dP = \beta d(\rho_w \cdot g \cdot h) = \beta \cdot \rho_w \cdot g \cdot dh \Rightarrow d\rho_w = \rho_w^2 \cdot \beta \cdot g \cdot dh$$

- *compresibilitatea acviferului* ($\alpha$) este parametrul prin intermediul căruia se evaluează variţia dimensiunii verticale a volumului elementar:

$$\frac{d(dz)}{dz} = \alpha \cdot dP = \alpha \cdot d(\rho_w \cdot g \cdot h) = \alpha \cdot \rho_w \cdot g \cdot dh \Rightarrow d(dz) = \alpha \cdot \rho_w \cdot g \cdot dh \cdot dz$$

- incompresibilitatea *volumului scheletului mineral* ($V_s$) este ipoteza pe care se bazează evaluarea variaţiei porozităţii totale($n$) datorată presiunii apei ($P$):

$$dV_s = 0 = d[(1-n) \cdot dx \cdot dy \cdot dz];$$
$$dz \cdot dn = (1-n) \cdot d(dz) = (1-n) \cdot \alpha \cdot \rho_w \cdot g \cdot dh \cdot dz \Rightarrow dn = (1-n) \cdot \alpha \cdot \rho_w \cdot g \cdot dh$$

Introducând expresiile variaţiei *densităţii apei* ($\rho_w$), *dimensiunii pe verticală* ($dz$) a volumului elementar şi *porozităţii*($n$) în expresia variaţiei masei (3) se obţine expresia:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w \cdot n \cdot dx \cdot dy \cdot dz) = \left[\frac{\partial \rho_w}{\partial t} \cdot n \cdot dz + \rho_w \cdot \frac{\partial n}{\partial t} \cdot dz + \rho_w \cdot n \cdot \frac{\partial (dz)}{\partial t}\right] \cdot dx \cdot dy = \\ &= \left[\rho_w^2 \cdot \beta \cdot g \cdot n + \rho_w^2 \cdot \alpha \cdot g \cdot (1-n) + \rho_w^2 \cdot \alpha \cdot g \cdot n\right] \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \\ &= \rho_w^2 \cdot g(n \cdot \beta + \alpha) \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz\end{aligned} \tag{4}$$

Masa de apă acumulată în volumul elementar (2) este egală schimbarea masei de apă din acelaşi volum în intervalul ($\partial t$) datorită variaţiei de presiune (ec.:(4)):

$$\rho_w \cdot K \cdot \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z}\right) dx \cdot dy \cdot dz = \rho_w^2 \cdot g(n \cdot \beta + \alpha) \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \tag{5}$$

Ecuaţia (5) reprezintă ecuaţia generală a *curgerii tridimensionale nestaţionare si conservative, într-un mediu omogen şi izotrop, sub presiune*, iar după simplificările posibile şi rearanjarea termenilor din membrul drept se poate scrie sub forma:

$$K \cdot \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z}\right) = (\alpha \cdot \rho_w \cdot g + n \cdot \beta \cdot \rho_w \cdot g) \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \tag{6}$$

Pentru acviferele sub presiune de o anumită *transmisivitate* ($T = K \cdot M$ în care *M* este grosimea acviferului), prin introducerea parametrului capacităţii de stocare ($S = M \cdot (\alpha \cdot \rho_w \cdot g + n \cdot \beta \cdot \rho_w \cdot g)$) ecuaţia generală a curgerii se poate scrie sub forma particularizată:

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right)=\frac{S}{T}\cdot\frac{\partial h}{\partial t} \qquad (7)$$

Pentru curgerea neconservativă, acviferul sub presiune este alimentat prin ***drenanţă,*** din acoperiş sau din culcuş cu un debit drenat sub forma (***Fig.6***):

$$\boxed{q_{drenat}=K'\cdot\frac{H_0-h}{m}}$$

în care
$K'$-conductivitatea hidraulică a stratului semipermeabil din culcuşul acviferului sub presiune;
$m$ - grosimea ecranului semipermeabil;
$H_0$-sarcina piezometrică a acviferului **drenat**;
$h$ - sarcina piezometrică a acviferului **drenant.**

Introducânt ***factorul de drenanţă*** ($B$) al acviferului drenant, definit cu relaţia:

$$B=\sqrt{\frac{T}{\frac{K'}{m}}}$$

debitul drenat devine:

$$q_{drenat}=K'\cdot\frac{H_0-h}{m}=\frac{K'}{m}\cdot(H_0-h)=\frac{T}{B^2}\cdot(H_0-h)$$

care introdus în ecuaţia curgerii nestaţionare în acviferul sub presiune conduce la:

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right)+\frac{q_{drenat}}{T}=\frac{S}{T}\cdot\frac{\partial h}{\partial t}$$

şi mai departe, la ecuaţia generală a curgerii sub presiune, nestaţionare şi neoconservative sub forma:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2(H_0-h)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(H_0-h)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(H_0-h)}{\partial z^2}\right)+\frac{H_0-h}{B^2}=\frac{S}{T}\cdot\frac{\partial(H_0-h)}{\partial t}}$$

### 6.4.2.1. Curgere staţionară neconservativă sub presiune

Modelul curgerii ***unidimensionale***, ***staţionare***, ***neconservative*** sub presiune se obţine din ecuaţia generală:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2(H_0-h)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(H_0-h)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(H_0-h)}{\partial z^2}\right)+\frac{H_0-h}{B^2}=\frac{S}{T}\cdot\frac{\partial(H_0-h)}{\partial t}}$$

cu următoarele simplificări (***Fig.2***):

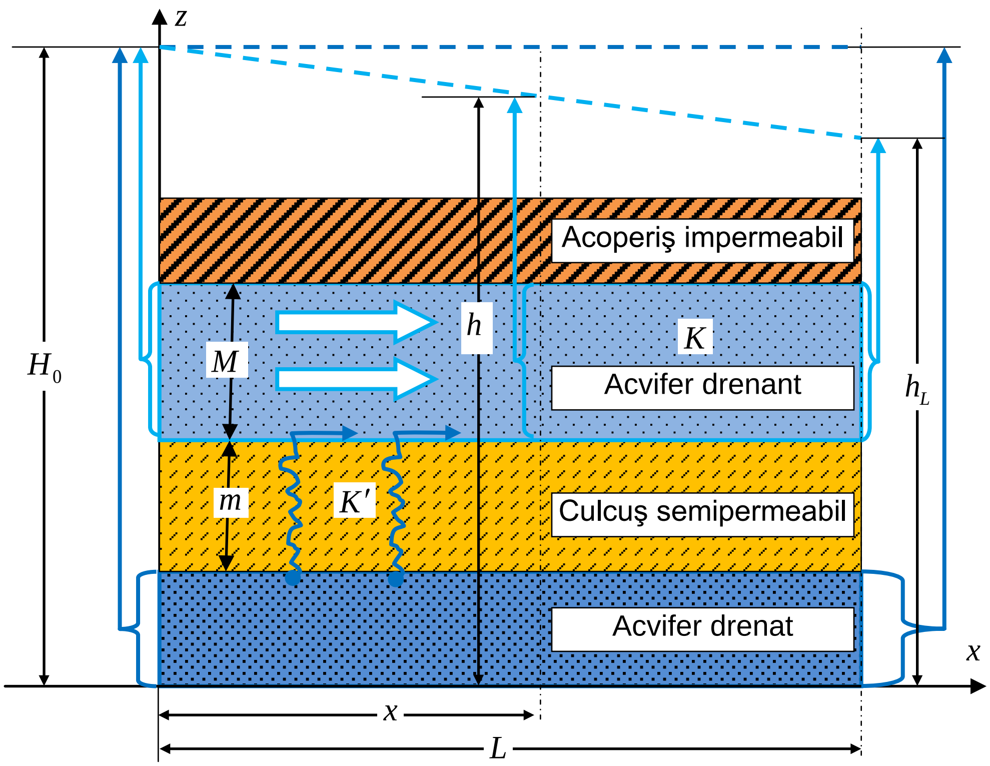



***Fig.2.*** *Curgerea staţionară, neconservativă, unidimensională , sub presiune*

- pentru caracterul unidimensional $\frac{\partial^2(H_0-h)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2(H_0-h)}{\partial z^2}=0$
- pentru caracterul staţionar: $\frac{\partial(H_0-h)}{\partial t}=0$

ecuaţia modelului (***Fig.6***) se reduce la:

$$\boxed{\frac{d^2(H_0-h)}{dx^2}=\frac{H_0-h}{B^2}}$$ cu necunoscuta $\boxed{H_0-h}$

în care $H_0 = const$, $T = K \cdot M = const$, $\lim_{x \to 0}\left(\frac{d}{dx}(H_0 - h)\right) = \frac{q_0}{T}$ şi cu soluţia analitică obţinută în două etape:

- prima integrare după înmulţirea cu $2 \cdot d(H_0 - h)/dx$:

cu rezultatul

$$\left[\frac{d(H_0 - h)}{dx}\right]^2 - \left(\frac{q_0}{T}\right)^2 = \frac{(H_0 - h)^2}{B^2}$$

- integrarea finală aplicată formei:

$$\int_0^{H_0 - h} \frac{d(H_0 - h)}{\sqrt{\left(\frac{q_0 \cdot B}{T}\right)^2 + (H_0 - h)^2}} = \frac{1}{B}\int_0^x dx$$

cu rezultatul:

$$\ln\left[(H_0 - h) + \sqrt{\left(\frac{q_0 \cdot B}{T}\right)^2 + (H_0 - h)^2}\right] - \ln\left(\frac{q_0 \cdot B}{T}\right) = \frac{x}{B}$$

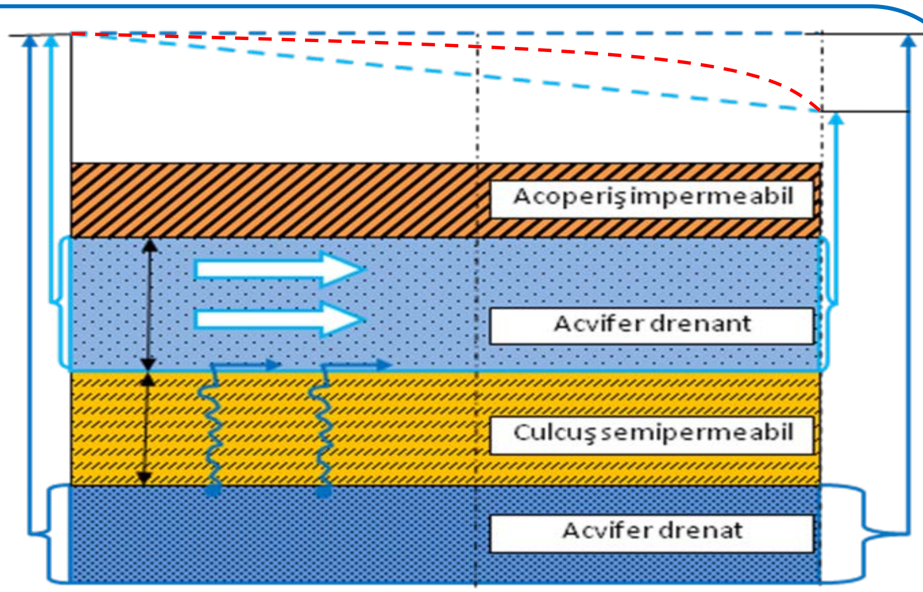
cu soluţia:

$$\boxed{H_0 - h = \frac{q_0}{2 \cdot T} \cdot B \cdot \left(e^{\frac{x}{B}} - e^{-\frac{x}{B}}\right) = \frac{q_0 \cdot B}{T} \cdot sh\left(\frac{x}{B}\right)}$$

din care se obţin formulele de calcul pentru:

- debitul unitar provenit din drenanţă $\boxed{q_0 = \frac{T \cdot (H_0 - h_L)}{B \cdot sh\left(\frac{L}{B}\right)}; x = L}$
- profilul piezometric: $\boxed{h_x = H_0 - \frac{H_0 - h_L}{sh\left(\frac{L}{B}\right)} \cdot sh\left(\frac{x}{B}\right); x \in [0, L]}$

***NOTA***. Debitul drenat ($q_0$) în acviferul sub presiune produce un "bombament" al profilului piezometric al acviferului sub presiune, similar cu cel produs de modulul de infiltrare în acviferul cu nivel liber (http://www.ahgr.ro/media/159544/6.4.1.2.a.curgere-statzionara_w.pdf).

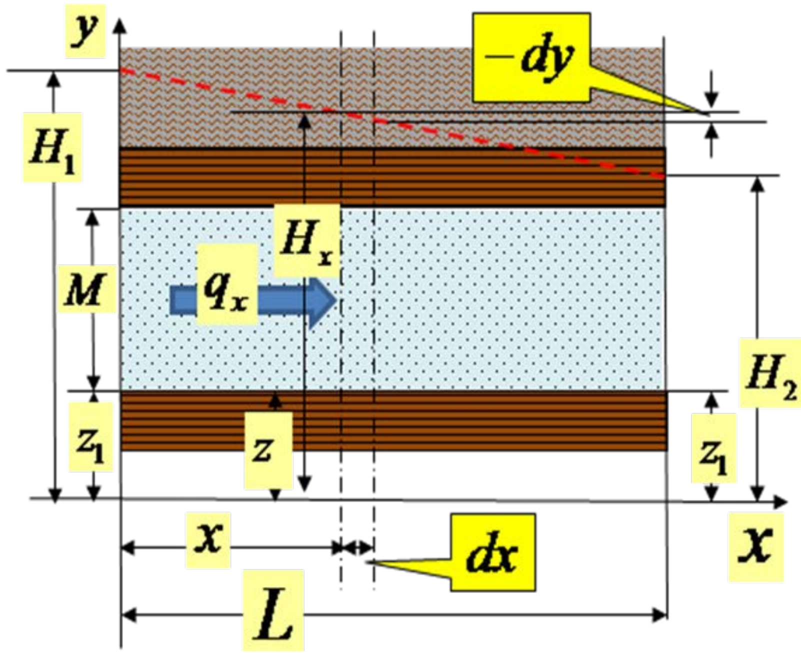


### 6.4.2.2. Curgere staţionară conservativă sub presiune

În cazul curgerii staţionare şi conservative unidimensionale sub presiune într-un strat acvifer omogen cu grosime constantă şi înclinare constantă ecuaţia generală a curgerii se reduce la (***Fig.3***):

$$\boxed{q_x = K \cdot \left( -\frac{dy}{dx} \right) \cdot M}$$

$q_x$ -debitul unitar la distanţa $x$, constant pentru orice $x \in [0, L]$;
$K$ -conductivitatea hidraulică a acviferului;
$I_x = -\dfrac{dy}{dx}$ -gradientul hydraulic;
$M$ -grosimea acviferului.




Dacă se cunoaşte sarcina piezometrică a acviferului în două piezometre plasate pe o ***linie de curent*** (http://www.ahgr.ro/media/156388/4.2_descriptori-ai-miscarii-fluidelor.pdf), prin integrarea modelului pe doumeniul spaţial cuprins între cele două piezometre se poate calcula:

- debitul unitar:

$$q_x \cdot \int_0^L dx = -K \cdot M \cdot \int_{H_1}^{H_2} dy \text{ din care rezultă } \boxed{q_x = \frac{K \cdot M \cdot (H_1 - H_2)}{2 \cdot L}}$$

- ecuaţia profilului piezometric:
- $$q_x \cdot \int_0^x dx = -K \cdot M \cdot \int_{H_1}^{H_x} dy \text{ din care rezultă } \boxed{H_x = H_1 - \frac{H_1 - H_2}{L} \cdot x; x \in [0, L]}$$

în care
$H_1, H_2$ -sarcinile piezometrice în cele două piezometre
$z_1, z_1$ - cotele culcuşului acviferului sub presiune în cele două piezometre $z_1 = z_2 = z_1$.

**NOTA**.Constanţa debitului unitar, este determinată de caracterul impermeabil al acoperişul şi culcuşul acviferului, în timp ce caracterul rectiliniu al profilului piezometric este determinat de doi factori:

- $K$ -conductivitatea hidraulică a acviferului constantă
- $M$ -grosimea acviferului constantă

Variaţia conductivităţii hidraulice sau a grosimii acviferului determină abateri ale profilului piezometric de la forma rectilinie care nu sunt cauzate de ...drenanaţă.